Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 9 , Abgabe: 21.12.2001 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Die Programmieraufgabe 36 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei A_1 die $(n,n)-$Tridiagonalmatrix mit

$$a_{ii} = a_i \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \qquad a_{i,i+1} = b_i \ , \quad a_{i+1,i} = c_i \ , \quad i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

Zeigen Sie, daß für das charakteristische Polynom $P_n(\lambda)$ von A_n die Rekursion

$$P_n = (\lambda - a_n) P_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} P_{n-2} \ , \qquad n = 2, 3, \ldots \ ,$$

erfüllt ist.

Hinweis: Entwickeln Sie $det(\lambda I - A_n)$ nach der letzten Zeile, und die verbleibende Determinante nach der letzten Spalte. Am besten machen Sie sich die Sache zunächst für $n = 4$ klar.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Sei $H = (h_{ij})$ eine Hessenbergmatrix und $H = QR$, $R = (r_{ij})$, ihre QR-Zerlegung. Zeigen Sie: $|r_{ii}| \geq |h_{i+1,i}|$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der reellsymmetrischen Matrix A, und sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A, $R = (r_{ij})$. Dann gilt

$$|r_{nn}| \geq \min_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j| \ .$$

Aufgabe 36: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Erstellen Sie ein Programm für den QR-Algorithmus.