Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 8 , Abgabe: 14.12.2001 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Man führe die Potenzmethode durch für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & -1 \\ -0.5 & 2.5 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 & -0.5 \\ -1 & 2.5 & 0.5 \\ 2 & 1.5 & 4.5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie aufgrund des Verhaltens der x^k, welcher der folgenden Fälle vorliegt. Benutzen Sie als Startvektoren x^0 die Vektoren $(1,1,1)$ und $(1,0,0)$.

a) $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, aber $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

b) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$, λ_1 von algebraischer Vielfachheit 1.

c) Zum betragsgrößten Eigenwert gehört ein Jordan-Kästchen der Länge größer als Eins.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei A die $(n,n)-$Matrix mit

$$a_{ii} = 2\ , \quad i = 1,\ldots,n\ , \qquad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1\ , \quad i = 1,\ldots,n-1\ .$$

Alle anderen Elemente von A seien 0.

Zeigen Sie, daß A die Eigenwerte

$$\lambda_\ell = 4\sin^2\left(\frac{\ell\pi}{2n+2}\right)\ , \quad \ell = 1,\ldots,n$$

hat.

Hinweis: Machen Sie für einen Eigenvektor x den Ansatz $x_i = \sin(c\, i)$, $i = 1,\ldots,n$ und bestimmen Sie c. Benutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei A die $(n,n)-$Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & . & & & & \\ . & & & & . & & & \\ . & & & & & . & & \\ 0 & 0 & . & & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & . & . & . & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\det(\lambda I - A)$.

(b) Zeigen Sie, daß jeder EW von A die geometrische Vielfachheit 1 hat.

(c) Geben Sie die Jordan'sche Normalform von A an.

Aufgabe 32: (4 Punkte)

(a) Wieviele paarweise nicht ähnliche $(6,6)-$Matrizen gibt es, deren charakteristisches Polynom $(\lambda - 3)^4 \, (\lambda - 1)^2$ ist?

(b) Sei $w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|w\|_2 = 1$.
Man bestimme die Jordan'sche Normalform von $A = I - 2ww^*$.