Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 7 , Abgabe: 07.12.2001 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Die Programmieraufgabe 28 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Die Inversion der (n,n)-Matrix A ist gleichbedeutend mit der Lösung des nichtlinearen Systems

$$F(X) = X^{-1} - A = 0\ .$$

Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von $F(X) = 0$ auf und zeigen Sie, daß ein Schritt des Newton - Verfahrens durch zwei Matrix - Multiplikationen und weitere n Additionen ausgeführt werden kann.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei A eine positiv definite (n,n)-Matrix. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte positiv definite Quadratwurzel $X = \sqrt{A}$ von A, d.h. X ist positiv definit und $X^2 = A$.

Zeigen Sie: Das Newton-Verfahren für das nichtlineare System $X^2 = A$ von $n(n+1)/2$ Unbekannten in $n(n+1)/2$ Variablen x_{ij}, $i > j$, lautet

$$X^{k+1} = \frac{1}{2}\left(X^k + (X^k)^{-1}A\right)\ .$$

Tip: Die zu berechnende Matrix X ist offenbar invertierbar und kommutiert mit A. Gehen Sie deshalb von Startmatrizen $X^{(0)}$ aus, die neben der Symmetrie ebenfalls diese Eigenschaften haben.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.
Man zeige für das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren: Das Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ konvergiert genau dann für alle b und alle Startwerte x_0, wenn $|a| < 2$.

Aufgabe 28: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem ($n = 10$)

$$\begin{aligned} &4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2\ ; \quad i,j = 1,\ldots,n-1, \quad h = 1/n \\ &u_{ij} = 0 \quad \text{falls}\ \ i \in \{0,n\} \quad \text{oder}\ \ j \in \{0,n\} \end{aligned}$$

durch das SOR–Verfahren mit $\omega = 1$ und $\omega = 1.53$.