Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 4 , Abgabe: 16.11.2001 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Die Programmieraufgabe 16 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Zeigen Sie:

$$\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}, \qquad \|A\|_1 = \operatorname*{Max}_j \sum_i |a_{ij}|$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)

a) Sei A hermitesche, invertierbare (n,n)-Matrix.

Seien $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ der betragsgrößte bzw. betragskleinste Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$k_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \ .$$

b) Es sei bekannt, daß in der Gleichung

$$Ax = b\ , \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \ , \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \ ,$$

A und b in der $\|\ \cdot\ \|_2$-Norm jeweils einen maximalen relativen Fehler von 0.05 aufweisen. Welche relative Genauigkeit können Sie für x garantieren?

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Sei A eine reelle (n,n)-Matrix.

(a) Zeigen Sie, daß die QR-Zerlegung von A nach Householder $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ Rechenoperationen erfordert.

(b) Sei A eine Hessenberg-Matrix, d.h. $a_{i,j} = 0$ für $i > j+1$. Wieviele Rechenoperationen braucht die QR - Zerlegung von A nach Householder?

(Angabe $an^b + O(n^{b-1})$ genügt).

Zeigen Sie, daß auch Q Hessenbergform hat.

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Schreiben Sie ein Programm qrdcmp (a,d,n,m) zur $QR-$Zerlegung nach Householder. Die $(n,m)-$Matrix a enthält bei Aufruf die zu zerlegende Matrix $(n \geq m)$. Der Faktor R finde sich nach Ablauf des Programms oberhalb der Diagonalen von a und in dem $m-$Vektor d. Auf und unterhalb der Diagonalen von a befinden sich die Vektoren der Spiegelungen. Schreiben Sie weiter die Programme

$$\text{qmalx}\ (a, x, n, m)\ , \qquad \text{qtmalx}\ (a, x, n, m)\ ,$$

welche - nach Aufruf von qrdcmp (a, d, n, m) - den $n-$Vektor x mit Qx bzw. Q^*x überschreiben.