Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 13 , Abgabe: 01.02.2002 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Die Programmieraufgabe 52 darf eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe 49: (4 Punkte)
Seien $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $y_0, \ldots, y_{n-1}$ reell. Zeigen Sie:

(a) $$\hat{x}_{n-k} = \overline{\hat{x}}_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

(b) Mit $z_k = x_k + iy_k$ gilt

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}\left(\overline{\hat{z}}_{n-k} + \hat{z}_k\right) \ , \quad \hat{y}_k = \frac{i}{2}\left(\overline{\hat{z}}_{n-k} - \hat{z}_k\right) \ .$$

(c) Zwei Fourier-Transformationen der Länge n auf reellen Daten kann man bis auf einen gemeinsamen reellen Faktor ausführen durch eine komplexe Fourier-Transformation der Länge n, plus n komplexe Additionen.

Aufgabe 50: (4 Punkte)
Seien $x_0, \ldots, x_{n-1}$ reell. Sei n gerade und $m = n/2$. Sei

$$z_j = x_{2j} + ix_{2j+1} \ , \quad j = 0, \ldots, m-1 \ .$$

Zeigen Sie:

(a)

$$2\hat{x}_k = \frac{1}{2}\left(\hat{z}_k + \overline{\hat{z}}_{m-k}\right) - \frac{i}{2}\left(\hat{z}_k - \overline{\hat{z}}_{m-k}\right) e^{-2\pi ik/n} \ , \quad k = 0, \ldots, m-1 \ .$$

(b) Eine Fourier-Transformation der Länge n auf reellen Daten kann man bis auf einen gemeinsamen reellen Faktor ausführen durch eine komplexe Fourier-Transformation der Länge $n/2$, plus n komplexe Additionen, plus $\frac{n}{2}$ komplexe Multiplikationen.

Aufgabe 51: (4 Punkte)
Berechnen Sie den Spline $B_{0,4}(x)$ für $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ und stellen Sie ihn graphisch dar.

Aufgabe 52: (Programmieraufgabe, 4 Punkte) Schreiben Sie ein Programm

$$\text{deconvolve } (w, y, n) \ ,$$

welches für $n = 2^p$ das Gleichungssystem $Wx = y$ mit der Matrix W aus Aufgabe 47(b) mit O $(n \log_2 n)$ Rechenoperationen löst. Verwenden Sie Aufgabe 48.