Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 11 , Abgabe: 18.01.2002 , 13.00 Uhr, Übungskasten F17, F25, F29

Aufgabe 41: (4 Punkte)
Seien folgende Stützstellen und Stützwerte gegeben

i	x_i	y_i
0	-1	-1
1	0	3
2	2	11
3	3	27

Sei p_3 das zugehörige Interpolationspolynom vom Grad 3.

(a) Berechnen Sie p_3 durch die Methode von Lagrange.

(b) Berechnen Sie p_3 durch die Methode von Newton.

(c) Berechnen Sie $p_3(1)$ durch die Methode von Neville.

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Sei $x_j = j$, $j = 0, \ldots, n$, und sei $\omega_j(x)$ der Koeffizient des $j-$ten Stützwertes in der Lagrange'schen Form des Interpolationspolynoms zu diesen Stützstellen.
Zeigen Sie: Für gerades n gilt:

$$\omega_{n/2}\,(\frac{1}{2}) = \mathrm{O}(2^n)\ , \quad n \to \infty\ .$$

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Seien $x_0, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und $n_0, \ldots, n_m$ ganze Zahlen > 0. Sei $n = n_0 + \ldots + n_m$.

Zeigen Sie: Sind y_{jk}, $0 \leq k < n_j$, $j = 0, \ldots, m$ beliebige komplexe Zahlen, so gibt es genau ein Polynom p vom Grade $\leq n-1$ mit

$$p^{(k)}(x_j) = y_{jk}\ , \qquad 0 \leq k < n_j\ , \quad j = 0, \ldots, m\ .$$

Aufgabe 44: (4 Punkte)
Sei $f \in C^{(n+2)}[a,b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ paarweise verschieden und $p \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom von f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, d.h. $p(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$.
Zeigen Sie: Zu jedem j existiert $\tilde{x}_j \in [a,b]$ mit

$$f'(x_j) - p'(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x}_j)}{(n+1)!}\ .$$