Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 9 , Abgabe: Freitag, 22.12.2000, 11.00 Uhr

Aufgabe 31: (3 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $|g'(x)| \leq 0.5$ für $x \in \mathbb{R}$. Der Fixpunkt $\overline{x}$ von g soll mit einem absoluten Fehler kleiner gleich $0.5 \cdot 10^{-6}$ berechnet werden. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ ergibt

$$x_4 = 0.51495 \quad \text{und} \quad x_5 = 0.51519 \, .$$

Wieviele zusätzliche Iterationen muss man ausführen, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen?

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Für $\alpha > 0$ sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{für} \quad x \geq 0 \, , \\ -|x|^\alpha & \text{für} \quad x < 0 \, . \end{cases}$$

Sei $x_0 > 0$ Startwert des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle $\overline{x} = 0$ von f.

(a) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert das Newton-Verfahren?

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha \neq 1$, nur linear konvergiert.

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2x_2 & - & x_1 x_2 & + & 1 \\ x_1^2 & - & x_2 & + & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in D$ besitzt.

(b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\|\overline{x} - x^k\|_\infty \leq 0.01$ für den Fixpunkt $\overline{x} \in D$ zu erzielen?

Aufgabe 34: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 22.12.2000, 11.00 Uhr)
Bei der Bahnbestimmung von Planeten ist die "KEPLER'sche Gleichung" zu lösen: Gesucht wird die "exzentrische Anomalie" $\overline{x}$ als Lösung der Gleichung

$$x = g(x) = e \sin(x) + \frac{2\pi}{U} \, T \, .$$

Dabei ist U die Umlaufzeit, T die seit dem Periheldurchgang vergangene Zeit in Tagen und e die numerische Exzentrizität der Bahnellipse. Für die realistischen Werte $e = 0.1$ und $2\pi T/U = 0.85$ berechne man die Iterationsfolge $x_{k+1} = g(x_k) \quad (k = 1, \ldots, 8)$, $x_0 = 0.85$, und vergleiche die Quotienten $|x_{k+1} - x_k| / |x_k - x_{k-1}|$ mit $g'(x_8)$.