Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 8 , Abgabe: Freitag, 15.12.2000, 11.00 Uhr

Aufgabe 28: (3 Punkte)
Konvergenzverbesserung nach AITKEN:
Die Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ sei linear konvergent gegen $\overline{x} \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$x_{k+1} - \overline{x} = (q + \varepsilon_k)(x_k - \overline{x}) \ , \quad |q| < 1 \ , \quad \varepsilon_k \to 0 \ .$$

Zeigen Sie: Gilt $x_k \neq \overline{x}$, so ist für genügend große k die Folge

$$z_k := x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

erklärt und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{z_k - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} = 0 \ .$$

Hinweis: Setzen Sie $e_k = x_k - \overline{x}$ und überlegen Sie

$$x_{k+1} - x_k = e_{k+1} - e_k \ , \quad x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = e_{k+2} - 2_{k+1} + e_k \ .$$

Aufgabe 29: (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Funktion

$$f(x) = x^n - a \ , \qquad a > 0 \ , \quad n \geq 2 \ ,$$

für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die positive Nullstelle $\overline{x} = a^{1/n}$ von f konvergiert. Überlegen Sie dazu, dass gilt:

(a) $x_k \geq a^{1/n} \quad \forall \quad k \geq 1$,

(b) $x_{k+1} \leq x_k \quad \forall \quad k \geq 1$.

Hinweis: Betrachten Sie die Newton'sche Iterationsfunktion und bestimmen Sie das Minimum dieser Funktion.

Aufgabe 30: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 15.12.2000, 11.00 Uhr)

(a) Programmieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle $\overline{x}$ der Funktionen

(1) $f(x) = 2x - \tan x$ (kleinste positive Nullstelle) bzw.
$f(x) = x - \arctan(2x)$ (positive Nullstelle).

(2) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} + 0.4 - 1.74\ \ln(R\sqrt{x})\ , \quad R = 10^5.$

Diese Funktion tritt bei der Strömung in einem Rohr auf, wobei R die Reynoldszahl und x die Reibungskonstante bedeutet.

Wählen Sie geeignete Startwerte x_0 für die Iterationen. Berechnen Sie in (1), (2) die Quotienten $|x_{k+1} - x_k|/|x_k - x_{k-1}|^2$.
Abbruchkriterien für (1), (2): $|f(x_k)| \le 10^{-14}$

(b) Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$h(x) = x^6 - x^5 + 2x^3 - 5x\ .$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Nullstelle $\bar{x}$ der Ableitung von h und prüfen Sie nach, ob $h''(\bar{x}) > 0$ gilt. Starten Sie die Iteration bei $x_0 = 2.0$ und berechnen Sie die Iterierten für $k = 1, ..., 10$.