Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 4 , Abgabe: Freitag, 17.11.2000, 11.00 Uhr

Aufgabe 13: (2+1 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = f(x_1, x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2)$.

(a) Bestimmen Sie die Verstärkungsfaktoren $k_{1i}(x),\ i = 1, 2$.

(b) Sei $\tilde{x} = x + \Delta x$ eine Näherung von $x = (1.570796, 1.570797)$ mit $|\Delta x_i| \leq 0.005$. Schätzen Sie mit Hilfe der Verstärkungsfaktoren den relativen Fehler von f ab.

Aufgabe 14: (1+3 Punkte)
Der Ausdruck $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ soll für $x = 35$ berechnet werden. Die Wurzel $w = \sqrt{x^2 - 1}$ werde hierbei einer 5-stelligen Tafel entnommen:

$$w = \sqrt{1224} = 34.986\ .$$

(a) Wie groß wird der absolute Fehler?

(b) Man stabilisiere den Ausdruck durch Umformung und bestimme den absoluten Fehler bei der Auswertung des umgeformten Ausdruckes.

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Funktionen $f(w)$ mit $w = \sqrt{x^2 - 1}$.

Aufgabe 15: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 17.11.2000, 11.00 Uhr)
Berechnen Sie die Integrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$$

für n=0,1,...,20 mit den folgenden beiden Methoden:

(a) Vorwärtsrekursion

$$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}\ , \quad n = 1, 2, ..., 20\ , \quad I_0 = 0.1823215 \quad (\approx \ln\frac{6}{5}\ , \quad \text{exakter Wert})\ ,$$

(b) Rückwärtsrekursion

$$I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}I_n\ , \quad n = 50, 49, ..., 1\ , \quad I_{50} = 0.0 \quad (\text{genähert})\ .$$

Hinweis: Rechnen Sie hier mit doppelter Genauigkeit (z.B. *double* oder *DOUBLE PRECISION*).

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe, Abgabe: Freitag, 17.11.2000, 11.00 Uhr)
Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von

$$y_n = \frac{1}{3^n}\,, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

unter Verwendung der Formel

$$(*) \qquad y_n = \frac{10}{3} y_{n-1} - y_{n-2}\,, \quad n = 2, 3, 4, ..., \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{3}\,.$$

(a) Beweisen Sie $(*)$.

(b) Berechnen Sie mit dem Programm y_n nach $(*)$ und den relativen Fehler $\epsilon_n = 1 - 3^n y_n$ von y_n für alle $1 \leq n \leq 16$.

(c) Wieso ist die Formel $(*)$ anfällig für Rundungsfehler? Programmieren Sie eine *stabile* Formel $y_n = a y_{n-1} + b y_{n-2}$ mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ in dem Sinne, dass Rundungsfehler keinen wesentlichen Einfluss haben. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von (b).

Hinweis: Rechnen Sie hier mit doppelter Genauigkeit (z.B. *double* oder *DOUBLE PRECISION*).