Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 1.7.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 11

Abgabe: 8.7.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eigenwerte einer transponierten Matrix) (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A^T identisch sind. Stimmt diese Aussage auch für die Eigenvektoren? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (Gerschgorin-Kreise) (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass durch die Ähnlichkeitstransformation $A \mapsto D^{-1}AD$ die Gerschgorin-Kreise die Form

$$K_i = \left\{ x \in \mathbb{C} : \ |x - a_{ii}| \leq \sum_{k\neq i} \left| \frac{a_{ik} d_k}{d_i} \right| \right\}$$

haben.
Finden Sie zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 3 \end{pmatrix}$$

einen Kreis, in dem genau ein Eigenwert von A liegt.

Aufgabe 3 (Hessenberg-Matrix) (4 Punkte)
Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformation auf Hessenberg-Form.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Mehrdim. Newton-Verfahren) (4 Punkte)
Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung lautet

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(u(x))\frac{\partial}{\partial x}u(x)\right) = f(x),$$

wobei $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gegebene (temperaturabhängige) Wärmeleitfähigkeit, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die gegebene Wärmequelle und $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ die gesuchte Lösungsfunktion ist. Diese Gleichung beschreibt die Temperaturverteilung entlang eines dünnen Stabes der Länge 1. Die Lösungsfunktion u gibt die Temperatur im Punkt $x \in [0,1]$ an und soll den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ genügen. Zur numerischen Lösung dieses Problems kann man wie folgt vorgehen: Zunächst diskretisiert man das Einheitsintervall durch $N+2$ äquidistante Stützstellen $x_i := i \cdot h$ $(i = 0, \ldots, N+1)$ mit der Schrittweite $h = \frac{1}{N+1}$ und erhält die Unterteilung

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

Die Näherungslösung im Punkt x_i bezeichne man mit u_i, d.h. $u_i \approx u(x_i), i = 1, \ldots, N$. Gemäß der Randbedingungen setze man $u_0 = u_{N+1} = 0$. Für das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ lässt sich die Ortsableitung von u approximieren durch

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}. \tag{1}$$

Zur Näherung der Wärmeleitfähigkeit σ auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ benutze man den Mittelwert der Ränder, d.h.

$$\sigma(u(x)) \approx \frac{\sigma(u_{i+1}) + \sigma(u_i)}{2} \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{2}$$

Durch Kombination von (1) und (2) und erneute Anwendung des Differenzenquotienten gelangt man zur diskreten Wärmeleitungsgleichung

$$-\frac{1}{h}\left[\frac{\sigma(u_{i+1}) + \sigma(u_i)}{2} \cdot \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{\sigma(u_i) + \sigma(u_{i-1})}{2} \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right] = f(x_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots, N.$$

a) Die Lösung $\bar{u} := (u_1, \ldots, u_N)^T$ der diskreten Wärmeleitungsgleichung lässt sich durch das Lösen einer geeigneten nichtlinearen Gleichung $F(u) = 0$ bestimmen. Geben Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ an und berechnen Sie die Jacobi-Matrix

$$DF(u) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right)_{1 \le i,j \le N}.$$

b) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine, welche das mehrdimensionale Newton-Verfahren

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \left(DF(u^{(k)})\right)^{-1} F(u^{(k)})$$

implementiert. Statt die Jacobi-Matrix zu invertieren, soll in jedem Schritt das LGS

$$DF(u^{(k)})(u^{(k+1)} - u^{(k)}) = -F(u^{(k)})$$

gelöst werden. Hierzu dürfen Sie eine vorgefertigte MATLAB-Funktion verwenden. Testen Sie Ihr Newton-Verfahren mit dem Lösen der diskreten Wärmeleitungsgleichung. Benutzen Sie folgende Daten: $N = 100$, $f(x) = 1$, Startvektor $u_i = 0.5$, $i = 1, \dots N$, Abbruchkriterium $||F(u)||_\infty \leq 10^{-8}$, $\sigma(u) = \sigma_0 + \sigma_1 u$, wobei

(i) $\sigma_0 = 0.1$, $\sigma_1 = 0$

(ii) $\sigma_0 = 0.1$, $\sigma_1 = 100$.

Wieviele Newton-Iterationen werden zur Lösung der Fälle (i) bzw. (ii) benötigt? Erklären Sie dieses Verhalten. Plotten Sie die beiden Lösungskurven.