Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 24.6.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 10

Abgabe: 1.7.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Modifiziertes Newton-Verfahren) (4 Punkte)
Es seien $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(I)$. f habe in $\xi \in (a, b)$ eine k-fache Nullstelle, d.h. $f(\xi) = f'(\xi) = \ldots = f^{(k-1)}(\xi) = 0$, $f^{(k)}(\xi) \neq 0$. Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - k \cdot \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

quadratisch gegen ξ konvergiert, falls x_0 genügend nahe bei ξ gewählt wird.

Aufgabe 2 (Verfahren höherer Ordnung) (4 Punkte)
Zur Berechnung von $\sqrt{a}, a > 0$ kann man das Newton-Verfahren einsetzen, z.B. mit $f_0(x) = x^2 - a$ oder mit $f_1(x) = \frac{a}{x^2} - 1$. Sei Φ_i die zugehörige Iterationsfunktion zu f_i $(i = 0, 1)$. Betrachten Sie die Iterationsfunktion Φ_s, die durch Linearkombination von Φ_0, Φ_1 entsteht, d.h. $\Phi_s(x) = (1 - s)\Phi_0(x) + s\Phi_1(x)$.

a) Zeigen Sie, dass das Verfahren $x^{(k+1)} = \Phi_s(x^{(k)})$ mindestens quadratisch gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass es ein s_a gibt, für welches das Verfahren kubisch (3. Ordnung) konvergiert.

Aufgabe 3 (Konvergenzverbesserung nach AITKEN) (4 Punkte)
Die Folge $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{R}$ sei linear konvergent gegen $\bar{x} \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$x^{(k+1)} - \bar{x} = (q + \varepsilon_k)(x^{(k)} - \bar{x}), \quad |q| < 1, \quad \varepsilon_k \to 0.$$

Zeigen Sie: Gilt $x^{(k)} \neq \bar{x}$, so ist für genügend große k die Folge

$$z^{(k)} := x^{(k)} - \frac{(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2}{x^{(k+2)} - 2x^{(k+1)} + x^{(k)}}$$

erklärt und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z^{(k)} - \bar{x}}{x^{(k)} - \bar{x}} = 0.$$

Hinweis: Setzen Sie $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$ und überlegen Sie

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = e^{(k+1)} - e^{(k)}, \quad x^{(k+2)} - 2x^{(k+1)} + x^{(k)} = e^{(k+2)} - 2e^{(k+1)} + e^{(k)}.$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Sekantenverfahren) (4 Punkte)
Das gedämpfte Sekantenverfahren zur Nullstellensuche einer Funktion $f \in C^0(\mathbb{R})$ ist definiert durch zwei Startwerte $x^{(0)} \neq x^{(1)} \in \mathbb{R}$, einer gegebenen Folge von Gewichten $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \omega_k = 1$ und der Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega_k \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}.$$

a) Schreiben Sie eine Routine, die dieses Verfahren realisiert. Außer der Funktion f und den beiden Startwerten soll ein Parameter das Ein- oder Ausschalten der Dämpfung ermöglichen. Die Folge der Gewichte im Fall der Dämpfung sei hierbei $\omega_k := \frac{1}{1+10e^{-k}}$. Im Fall ohne Dämpfung ist $\omega_k = 1$. Weitere Parameter sind die Maximalzahl der Iterationen k_{max} und eine Genauigkeitstoleranz $\varepsilon > 0$. Ergebnis Ihrer Routine soll $x^{(k)}$ sein, sobald die gewünschte Genauigkeit $|f(x^{(k)})| < \varepsilon$ erreicht ist. Falls dies in gewünschter Iterationszahl nicht möglich ist, wird $x^{(k_{max})}$ zurückgegeben.

b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten Ihrer Routine anhand der Funktion $f(x) = \arctan(x-1)$ und den Einstellungen $x^{(0)} = 4, x^{(1)} = 4.01, k_{max} = 20, \varepsilon = 10^{-10}$. Geben Sie die Folge der Näherungslösungen an, die ohne Dämpfung und mit Dämpfung erzeugt werden. Konvergieren diese gegen die eindeutige Nullstelle $x^* = 1$?