Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen 17.6.2010

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 9

Abgabe: 24.6.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren für Polynome) (4 Punkte)
Es sei $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$ ein Polynom mit n reellen Nullstellen $\xi_1 \geq \ldots \geq \xi_n$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} > \xi_1$ monoton gegen ξ_1 konvergiert.

Aufgabe 2 (Konvergenz des Newton-Verfahrens) (2 Punkte)
Sei $f \in C^2([a,b])$ und $x^* \in (a,b)$ sei eine einfache Nullstelle. Zeigen Sie, dass für genügend kleines $\rho > 0$ das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in B_\rho(x^*)$ konvergiert.

Aufgabe 3 (Konvergenz des Sekanten-Verfahrens) (6 Punkte)
Sei $f \in C^2([a,b])$ mit $x^* \in (a,b)$, $f(x^*) = 0$ und $m := \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| > 0, M := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Sei $q := \frac{M}{2m}\rho < 1$ für ein $\rho > 0$. Sei $x^{(0)}, x^{(1)} \in B_\rho(x^*)$ mit $x^{(0)} \neq x^{(1)}$ und $x^{(k+1)}$, $k \geq 1$ definiert durch das Sekantenverfahren gemäß

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$$

Zeigen Sie:

a) Für alle k gilt $x^{(k)} \in B_\rho(x^*)$ und $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$.

b) Für alle k gilt die a-priori Fehlerschranke $|x^{(k)} - x^*| \leq \frac{2m}{M} q^{\gamma_k}$, wobei $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen ist, d.h. $\gamma_0 = \gamma_1 = 1, \gamma_{k+2} = \gamma_{k+1} + \gamma_k$.

c) Für alle $k \geq 1$ gilt die a-posteriori Fehlerschranke

$$\left|x^{(k)} - x^*\right| \leq \frac{1}{m}|f(x^{(k)})| \leq \frac{M}{2m}|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \cdot |x^{(k)} - x^{(k-2)}|.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass gilt $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| \leq \frac{M}{2}|y - z|$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Kombination von Newton-Verfahren und Intervallschachtelung) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine `NewtonSchachtelung.m` zur Nullstellensuche einer Funktion f, welches auf der Kombination von Newton-Verfahren und Intervallschachtelung basiert.
Als Eingabeparameter sollte Ihre Routine die Intervallgrenzen a und b eines Startintervalls $[a, b]$, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie eine Toleranz $tol > 0$ für das Abbruchkriterium $|f(x^{(k)})| \leq tol$ erwarten.
Die Rückgabewerte sollten die berechnete Näherungslösung $\bar{x} \in \mathbb{R}$ sowie die Anzahl der durchgeführten Iterationen (a) des Intervallschachtelungsverfahrens und (b) des Newton-Verfahrens sein. Außerdem sollte ein Array übergeben werden, welches ausgehend von dem Startpunkt $x^{(0)}$ alle Iterierten $x^{(k)}$ enthält.

b) Die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0, \\ (12(x-1) - 4(x-1)^3)/8 & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Schreiben Sie MATLAB-Funktionen

`NewtonSchachtelung_f.m` und `NewtonSchachtelung_df.m`,

welche die Funktion f bzw. deren Ableitung f' implementieren. Plotten Sie die Funktion f im Intervall $[-1, 3]$.

c) Testen Sie die Funktionalität Ihrer Routine `NewtonSchachtelung.m` zur Nullstellensuche dieser Funktion f. Verwenden Sie für das Startintervall $a = 0$ und $b = 100$ und als Toleranz $tol = 10^{-15}$. Geben Sie den Wert der Näherungslösung und die Anzahl der durchgeführten Iterationen (Intervallschachtelung / Newton) aus. Plotten Sie den logarithmischen absoluten Fehler (exakte Lösung: $x = 1$) gegen die Anzahl der Iterationen.