Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 10.6.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 8

Abgabe: 17.6.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Relaxationsverfahren) (4 Punkte)
Sei $A = L+D+R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = I_n$, wobei I_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Sei T die zugehörige Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung von $Ax = b$. Die Eigenwerte λ_i der Matrix T seien reell und erfüllen $-1 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n < 1$. Für $\omega \in \mathbb{R}$ sei das Relaxationsverfahren durch die Iterationsmatrix $T(\omega) = (1-\omega)I_n + \omega T$ und die Iterationsvorschrift $x^{(k+1)} = T(\omega)x^{(k)} + D^{-1}b,\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass $T(\omega)$ die Eigenwerte $\mu_i = 1 - \omega + \omega\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$ besitzt.

b) Bestimmen Sie ω_0 so, dass der Spektralradius von $T(\omega_0)$ minimal wird.

c) Zeigen Sie, dass der Spektralradius von $T(\omega_0)$ für $\lambda_1 \neq -\lambda_n$ kleiner als der Spektralradius von $T(1) = T$ ist.

Aufgabe 2 (Vorkonditionierung von LGS) (4 Punkte)
Zu einem Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}, a_{ii} \neq 0, b \in \mathbb{R}^n$ besteht die *Zeilenäquilibrierung* darin, das System $CAx = Cb$ zu lösen, wobei $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $c_i := \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|\right)^{-1}$. Die *Diagonalvorkonditionierung* verwendet stattdessen die Matrix $C' = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1})$. Gegeben seien für $a \neq 0$ die folgende Matrix und ihre Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 2a & 4a^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2a} & \frac{2}{a} & -\frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a^2} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für $a > 4$ die Konditionen $\mathrm{cond}_\infty(A)$, $\mathrm{cond}_\infty(CA)$ und $\mathrm{cond}_\infty(C'A)$ (d.h. bzgl. der induzierten $\|\cdot\|_\infty$-Norm). Welches der Verfahren ist daher für große a zu bevorzugen?

Aufgabe 3 (Konvergenzgeschwindigkeit des cg-Verfahrens) (4 Punkte)
Sei $\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ die Kondition der symmetrischen und positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, wobei $\lambda_{\max}$ der größte und $\lambda_{\min}$ der kleinste Eigenwert von A sei. Seien (z_k) die durch das cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ generierte Folge von Näherungslösungen und $||y||_A := \sqrt{< Ay, y >}$ für $y \in \mathbb{R}^m$.

a) Betrachten Sie das Polynom

$$\bar{p}(\lambda) = \frac{T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min} - 2\lambda)/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}))}{T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}))},$$

wobei T_n durch das n-te Tschebyscheff-Polynom

$$T_n(t) := \begin{cases} \cos(n \arccos t) & \text{für } |t| \leq 1, \\ \frac{1}{2}\left[(t + \sqrt{t^2 - 1})^n + (t + \sqrt{t^2 - 1})^{-n}\right] & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

$$\max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} |\bar{p}(\lambda)| = \frac{1}{T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}))}.$$

b) Unter Verwendung der obigen Darstellung der Tschebyscheff-Polynome zeige man weiter, dass gilt:

$$T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} + 1}{\sqrt{\kappa(A)} - 1}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} + 1}{\sqrt{\kappa(A)} - 1}\right)^{-n}\right)$$

c) Folgern Sie schließlich die Konvergenzaussage des cg-Verfahrens:

$$||z_n - x||_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1}\right)^n ||z_1 - x||_A,$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für ein Polynom p vom Grad $\deg p \leq n$ mit $p(0) = 1$ gilt:

$$||z_n - x||_A \leq \max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} |p(\lambda)| \cdot ||z_1 - x||_A$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: cg-Verfahren) (4 Punkte)

Implementieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben und A positiv definit und symmetrisch.

Das cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ startet mit einem Vektor $z_1 \in \mathbb{R}^m$ und $t_1 = r_1 = b - Az_1$. Das Verfahren wird dann für $n = 1, \ldots, l$ mit $l \leq m$ beschrieben durch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{< t_n, r_n >}{< At_n, t_n >} \\ z_{n+1} &= z_n + \alpha_n t_n \\ r_{n+1} &= b - Az_{n+1} \\ \gamma_n &= -\frac{< Ar_{n+1}, t_n >}{< At_n, t_n >} \\ t_{n+1} &= r_{n+1} + \gamma_n t_n \end{aligned}$$

Die Funktion zur Lösung des LGS sollte von der Form

$$cg(A, b, z_1, eps)$$

sein und neben der Näherungslösung auch die Anzahl der durchgeführten Iterationen zurückgeben. Der Parameter eps sollte für das Abbruchkriterium $< r_n, r_n > \leq eps$ verwendet werden.

(a) Testen Sie Ihr Verfahren mit $m = 601$ anhand der Matrix $A = (a_{ij})$ mit $i, j = 1, \ldots, m$:

$$a_{ii} = 4,\ a_{ij} = -1 \text{ falls } j \neq i \text{ und } j = i + 1,\ j = i - 1,\ j = m + 1 - i$$

und der rechten Seite

$$b_i = -m - 1 + 3i \text{ für } i \neq \frac{m}{2} \text{ und } i \neq m,\ b_{\frac{m}{2}} = m + 1,\ b_m = 3m.$$

Die exakte Lösung ist $x_i = i$.

(b) **Hilbert Matrix:** Ein notorisch schlecht konditioniertes Problem ist $Ax = b$ mit

$$a_{ij} = (i + j - 1)^{-1},\ b_i = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}(i + j - 1)^{-1},\ (i, j = 1, \ldots, m)$$

und exakter Lösung $x_i = (-1)^{i-1}\ i = 1, \ldots, m$. Testen Sie das cg-Verfahren mit $m = 5$ und $m = 10$.

Wählen Sie für eps zum einen $1e - 13$ und zum anderen $1e - 8$. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor. Geben Sie jeweils den maximalen Fehler zur exakten Lösung sowie die Anzahl der Iterationen im cg-Verfahren an.