Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 2.6.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 7

Abgabe: 10.6.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (GSV und ESV) (6 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Was ist die Lösung des linearen Gleichungssystems?

b) Berechnen Sie die Iterationsmatrizen G und E des Gesamtschrittverfahrens und des Einzelschrittverfahrens gemäß $G := -A_D^{-1}(A_L + A_R),\ E := -(A_D + A_L)^{-1}A_R$.

c) Berechnen Sie $||G||_\infty$ und $||E||_\infty$.

d) Es sei der Startvektor $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ gegeben. Berechnen Sie die Iterierten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ für die beiden Verfahren.

Aufgabe 2 (Zerlegbarkeit von Matrizen) (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann zerlegbar ist, wenn eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\tilde{A}_{21} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times k}$ mit $1 \leq k \leq n-1$.

Aufgabe 3 (Konvergenz vom GSV und ESV) (2 Punkte)
Bei der Diskretisierung der Randwertaufgabe $u''(x) = f(x)$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ erhält man ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren und das Einzelschrittverfahren in diesem Fall konvergieren.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: GSV und ESV) (4 Punkte)
Betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x)$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi$, $h := \frac{1}{n+1}$, $i = 0, \ldots, n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $u_0 = u_{n+1} = 0$ gegeben sind und u_i, $i = 1, \ldots, n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind.
Implementieren Sie das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren zur Lösung dieser Randwertaufgabe, wobei die rechte Seite $f(x)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \pi^2 \sin(\pi x),$$

d.h. die exakte Lösung u des Randwertproblems ist gegeben durch $u(x) = \sin(\pi x)$.
Ihr Programm sollte terminieren, wenn maximale Fehler $\max_i |u_i - u(x_i)|$ kleiner ist als die vorgegebene Schranke $TOL = 10^{-3}$. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor und berechnen Sie die Näherungslösung $u_h = (u_1, \ldots, u_n)$ und den maximalen Fehler $\max_i |u_i - u(x_i)|$.
Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

(i) Einlesen der Anzahl der Teilintervalle n und Abfrage, ob das Gesamtschrittverfahren oder das Einzelschrittverfahren verwendet werden soll.

(ii) Berechnung des Ergebnisses.

(iii) Ausgabe der berechneten Näherungslösung, des maximalen Fehlers und der Anzahl der Iterationsschritte.

Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

n	20	20	40	40
GSV / ESV	GSV	ESV	GSV	ESV