
Übung zur Vorlesung
Einführung in die Numerische Mathematik
Sommersemester 2010 — Blatt 6

Abgabe: Mi, 2.6.2010, 13:00 Uhr (Do, 3.6., ist Feiertag)

Aufgabe 1 (Lineare Ausgleichsrechnung) (4 Punkte)
In einem Experiment messen Sie die folgende Abnahme einer Konzentration gegenüber der Zeit:

Zeit t [s]	1	2	3	4	5
Konzentration $c(t)$ [mol/l]	9.1	5.7	4.0	1.2	0.6

- Stellen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ auf, welches bei einer Ausgleichsrechnung unter Annahme eines linearen Zusammenhangs $c(t) = c^0 + at$ entsteht.
- Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit der Pseudo-Inversen) (4 Punkte)
Es sei eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang p mit diagonalem $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p > 0$ und orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass durch die *Moore-Penrose Bedingungen*

$$AB = (AB)^T, \quad BA = (BA)^T, \quad BAB = B, \quad ABA = A$$

eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eindeutig definiert ist.

- Wir definieren die Diagonalmatrix $\Sigma^+ := \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zeigen Sie, dass die Matrix $B := V\Sigma^+U^T$ die Moore-Penrose-Bedingungen erfüllt. Hiermit ist insbesondere die Pseudoinverse $A^+ := V\Sigma^+U^T$ unabhängig von der Wahl der Singulärwertzerlegung eindeutig definiert.

Aufgabe 3 (Matrixapproximation durch SVD) (4 Punkte)

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei eine Singulärwertzerlegung wie in Aufgabe 2 gegeben. Zu einem r mit $1 \leq r < p$ wird eine Approximation $A_r := U\Sigma_r V^T$ mit $\Sigma_r := \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert. Zeigen Sie für $r = 1$, dass bzgl. der Frobenius-Norm $\|A\|_F := (\sum_{i,j=1}^{m,n} (a_{ij}^2))^{1/2}$ gilt:

$$\inf_{B \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rang}(B)=r} \|A - B\|_F = \|A - A_r\|_F.$$

Hinweis: Überlegen Sie, dass man eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang 1 darstellen kann als $B = \sigma'_1 \cdot u \cdot v^T$ mit $\sigma'_1 > 0$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \|v\| = 1$ und dass die Frobenius-Norm invariant bzgl. orthogonaler Abbildungen ist.

Bemerkung: Die Aussage gilt allgemeiner für alle $1 \leq r < p$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: QR-Zerlegung) (4 Punkte)

- a) Schreiben Sie eine Routine `QRzerlegung`, welche zu einer übergebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine rechte Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ liefert, so dass gilt $A = QR$.
- b) Testen Sie diese Routine, indem Sie mit Hilfe der resultierenden QR-Zerlegung die folgenden Ausgleichsprobleme lösen:
 - (i) Blatt 5, Aufgabe 3a)
 - (ii) Blatt 5, Aufgabe 3b)
 - (iii) Blatt 6, Aufgabe 1)