Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 12.5.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 5

Abgabe: 20.5.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Positiv definite Tridiagonalmatrizen) (4 Punkte)
Gegeben sei folgende Matrix für $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Matrix positiv definit ist.

b) Geben Sie für die Fälle aus a) die Cholesky-Zerlegung der Matrix an.

Aufgabe 2 (LR-Zerlegung für Tridiagonalmatrizen) (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & \vdots \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Alle Teilmatrizen $A_k = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le k}}$ von A seien ebenfalls regulär. Geben Sie die LR-Zerlegung der Matrix in Abhängigkeit der Parameter $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ an.

Aufgabe 3 (Lineare Ausgleichsrechnung) (4 Punkte)

(a) Gegeben seien die drei Punkte:

t_i	1	2	3
y_i	2	4.4	6

Bestimmen Sie eine Ausgleichsgerade $y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ durch diese Punkte.

(b) Durch die Messpunkte

t_i	$\frac{1}{e}$	1	e
y_i	-1	e	$2+e^2$

soll eine Ausgleichsfunktion $u(t) = \alpha t + \beta \ln(t),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, gelegt werden. Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem und berechnen Sie die optimalen Parameter α, β.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Randwertproblem) (4 Punkte)
Betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x), x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi$, $h := \frac{1}{n+1}$, $i = 0, \ldots, n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $u_0, u_{n+1} = 0$ gegeben sind und $u_i, i = 1, \ldots, n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind. Die rechte Seite $f(x)$ sei gegeben durch $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$.

a) Schreiben Sie eine Routine, die eine untere und obere Dreiecksmatrix L und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ übergeben bekommt und die Lösung $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $LR\bar{x} = b$ berechnet. Hierzu sollen keine Matrix-Operationen verwendet werden, stattdessen explizit mit den Einträgen der Matrizen und Vektoren gearbeitet werden.

b) Schreiben Sie eine Routine, die zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ die LR-Zerlegung der Matrix von obigem Randwertproblem und die rechte Seite b aufstellt. Verwenden Sie, dass für die LR-Zerlegung einer Tridiagonalmatrix A aus Aufgabe 2) gilt

$$l_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\beta_j}{\bar{\alpha}_j}, & \text{für } i = j+1 \\ 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\}, \qquad r_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_i, & \text{für } i = j-1 \\ \bar{\alpha}_i, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\},$$

wobei $\bar{\alpha}_i$ rekursiv definiert ist durch $\bar{\alpha}_1 := \alpha_1$ und $\bar{\alpha}_i := \alpha_i - \frac{\beta_{i-1}\gamma_{i-1}}{\bar{\alpha}_{i-1}}$, für $i = 2, \ldots, n$. Geben Sie für $n = 10$ die resultierenden Matrizen L und R an.

c) Lösen Sie das Randwertproblem für $n = 10$ durch Kombinieren Ihrer Routinen aus a) und b) und geben Sie den Lösungsvektor an.