Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

6.5.2010

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 4

Abgabe: Mi, 12.5.2010, 13:00 Uhr (Do, 13.5., ist Feiertag)

Aufgabe 1 (Neumann-Reihe) (4 Punkte)
Sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ stetig und linear mit $||T|| < 1$. Sei S definiert durch

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Zeigen Sie

a) $S(x)$ ist für alle $x \in X$ wohldefiniert.

b) S ist linear und stetig und $||S|| \leq \frac{1}{1-||T||}$.

c) $\mathrm{Id} - T$ ist bijektiv und es ist $S = (\mathrm{Id} - T)^{-1}$.

Aufgabe 2 (Störungssatz für lineare Gleichungssysteme) (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $||\cdot||$ eine induzierte Matrixnorm. Sei $\Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben mit $||\Delta A|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$ und $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von $Ax = b$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des gestörten Gleichungssystems $(A + \Delta A)\bar{x} = b + \Delta b$. Zeigen Sie:

a) $A + \Delta A$ ist regulär.

b) Für den relativen Fehler gilt $\frac{||x-\bar{x}||}{||x||} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\Delta b||}{||b||} + \frac{||\Delta A||}{||A||} \right)$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 mit einer geeigneten Wahl von T.

Aufgabe 3 (LR-Zerlegung) (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie dabei alle (wesentlichen) Zwischenschritte auf.

b) Unter Ausnutzung der Zwischenergebnisse berechnen Sie die Lösung von $Ax = b$ für $b = (2, 1, 2, -1)^T$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Gauß-Verfahren) (4+2 Punkte)

a) Implementieren Sie eine Funktion, die das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, $x, b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ realisiert. Auf eine Pivotisierung darf hierbei verzichtet werden. Testen Sie Ihr Programm mit dem Gleichungssystem $Ax = b$ für $n \in \mathbb{N}, n > 1$:

$$A_{ij} = \frac{i^{j-1}}{n(n-1)}, \quad b_i = i \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, n.$$

Ein Maß für den Fehler einer numerischen Lösung x ist das Residuum $Ax - b$. Bestimmen Sie die Maximumsnorm des Residuums $\|Ax - b\|_\infty$ zu den numerischen Lösungen Ihrer Implementation für $n = 10, 20, 50, 100$.

b) **Zusatzaufgabe:** Erweitern Sie Ihr Programm mit der Funktionalität der Pivotisierung (als Pivotelement wird also das betragsgrößte Element der jeweiligen Spalte gewählt). Die Entscheidung, ob mit oder ohne Pivotisierung gerechnet wird, soll anhand eines weiteren Parameters beim Aufruf der Funktion erfolgen. Die durch die Pivotsuche entstandenen Zeilenvertauschungen sollen nicht explizit ausgeführt werden. Stattdessen werden die Zeilenvertauschungen in einem Integer-Feld gespeichert.
Testen Sie Ihr Programm mit dem linearen Gleichungssystem aus Teil a) und vergleichen Sie die Residuen für $n = 10, 20, 50, 100$.