Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

29.4.2010

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 3

Abgabe: 6.5.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Rundungsfehler) (4 Punkte)

(x, y) sei die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & A \\ x & + & 1.01\,y & = & B. \end{array}$$

Berechnen Sie die absoluten und relativen Fehler von x und y, wenn $A = 1000$ und $B = 1005$ bis auf einen relativen Eingabefehler ϵ gegeben sind, also $\tilde{A} = A(1 + \epsilon_1)$ und $\tilde{B} = B(1 + \epsilon_2)$ mit $|\epsilon_1|,\ |\epsilon_2| \leq \epsilon$.

Aufgabe 2 (Konditionszahlen) (4 Punkte)

Es bezeichne $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ die Menge der Eigenwerte der reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für die Kondition bzgl. der Spektralnorm

a) von symmetrischen regulären Matrizen gilt

$$\mathrm{cond}(A) := \frac{\max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|},$$

b) von orthogonalen Matrizen gilt

$$\mathrm{cond}(A) = 1.$$

Aufgabe 3 (Unvollständiger Prä-Hilbertraum) (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass $V := (C[0, 1], \|\cdot\|_{L^2})$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit der L^2-Norm $\|f\|_{L^2} := \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{1/2}$ ein normierter Raum ist, aber kein Banachraum.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Apfelmännchen) (6 Punkte)

Für eine komplexe Zahl c sei folgende rekursive Folge definiert: $z_0 := 0$, $z_{n+1} := z_n^2 + c$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren zu gegebener Konstante $N \in \mathbb{N}$ folgende Funktion:

$$f_N(c) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |z_n| \leq 2 \text{ für alle } n = 0, \ldots, N \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass das Problem der Berechnung von $f_N(c)$ für $c = -2$ für kein $N > 1$ wohlgestellt ist. Zeigen Sie, dass für $|c| > 2$ die Berechnung von $f_N(c)$ in geeigneter Umgebung $B_\delta(c)$ wohlgestellt ist.

b) Implementieren Sie die Funktion $f_N(c)$. Werten Sie Ihre Funktion für $N = 200$ auf einem äquidistanten kartesischen Gitter im Bereich $[-2.25, 1] \times i[-1.5, 1.5] \subset \mathbb{C}$ aus. Hierbei seien die komplexen Zahlen mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Visualisieren Sie die resultierenden Werte z.B. als Textausgabe, 2D-Darstellung oder 3D-Funktionsgraph.

Bemerkung: Die Punkte $c \in \mathbb{C}$ mit $f_N = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ bilden die *Mandelbrot-Menge*.