Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

22.4.2010

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 2

Abgabe: 29.4.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Banachscher Fixpunktsatz) (4 Punkte)

a) Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ abgeschlossene Teilmenge, $T : D \to D$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $L \in [0, 1)$, $u_0 \in D$ beliebig und $u_{k+1} := T(u_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein eindeutig bestimmter Fixpunkt $\bar{u} \in D$ und es gilt $\lim_{k\to\infty} u_k = \bar{u}$ (Skript: Satz 1.29, Aussagen (i) und (ii)). Beweisen Sie folgende Abschätzungen:

(iii) $||\bar{u} - u_k|| \leq L||\bar{u} - u_{k-1}||$, für $k \in \mathbb{N}$, d.h. der Fehler sinkt monoton.

(iv) $||\bar{u} - u_k|| \leq \frac{L^k}{1-L}||T(u_0) - u_0||$ für $k \in \mathbb{N}_0$ (A priori Fehlerschranke).

(v) $||\bar{u} - u_k|| \leq \frac{L}{1-L}||u_k - u_{k-1}||$ für $k \in \mathbb{N}$ (A posteriori Fehlerschranke).

b) Zur Bestimmung von $\sqrt{a}$, $0 < a < 2$, setzt man $a = 1 - b$, $|b| < 1$, $\sqrt{1 - b} = 1 - x$, woraus sich die Fixpunktaufgabe

$$x = g(x) := \frac{1}{2}(x^2 + b)$$

ergibt. Es ist $I := [-|b|, |b|]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Geben Sie den Kontraktionsfaktor L an.

Aufgabe 2 (Anwendung des Fixpunktsatzes) (4 Punkte)

Zur Lösung von $x + \ln x = 0$ stehen die folgenden Formeln zur Verfügung:

(i) $x = g_1(x) := -\ln x$,

(ii) $x = g_2(x) := e^{-x}$,

(iii) $x = g_3(x) := \frac{\beta x + e^{-x}}{\beta + 1}$, $\beta > 0$.

Untersuchen Sie die drei Funktionen auf Eignung für das Fixpunktverfahren. Geben Sie jeweils ein entsprechendes (nichttriviales) Intervall und zugehörigen Kontraktionsfaktor an oder begründen Sie die Unbrauchbarkeit der Funktion.

Aufgabe 3 (Matrixnorm) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass durch $\|A\| := \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ eine Norm auf $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiert wird, welche durch kein Paar Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ induziert wird.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $A^T A$ stets symmetrisch und positiv semidefinit ist.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zusätzlich unitär. Zeigen Sie, dass $||A||_{2,2} = 1$ gilt.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Wurzelberechnung) (4 Punkte)

(a) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von $\sqrt{a}$, $0 < a < 2$. Verwenden Sie dazu die Fixpunktiteration aus Aufgabe 1 b) mit Startwert $x_0 = 0$ und brechen Sie die Iteration mit Hilfe der a posteriori Fehlerschranke aus Aufgabe 1 a) zu einer vorgegebenen Fehlertoleranz TOL ab.
Ihre Routine sollte a und TOL einlesen und den berechneten Näherungswert von $\sqrt{a}$, die Anzahl der Iterationen und die berechnete a posteriori Fehlerschranke ausgeben.

(b) Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

a	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{9}$	2^{-8}	2^{-8}	2^{-8}
TOL	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}