Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 15.4.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. B. Christiansen

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2010 — Blatt 1

Abgabe: 22.4.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (1$-$ und ∞-norm induzierte Operatornormen) (4 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine $n \times n$–Matrix.

a) Finden Sie eine optimale Konstante C_1, so dass gilt $||Ax||_1 \leq C_1||x||_1$.

b) Finden Sie eine optimale Konstante C_∞, so dass gilt $||Ax||_\infty \leq C_\infty||x||_\infty$.

c) Zeigen Sie, dass es für alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ eine Konstante C gibt, so dass gilt $||Ax|| \leq C||x||$.

Hinweis: $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$, $||x||_\infty := \max_{i=1,..,n} |x_i|$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit von linearen Operatoren) (4 Punkte)
Seien V, W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) A ist stetig,

b) A ist beschränkt,

c) A ist stetig in 0.

Hinweis: A heißt beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, mit $||Ax||_W \leq C||x||_V$ für alle $x \in V$. A heißt stetig im Punkt $x \in V$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit: Für alle $y \in V$ mit $||x - y||_V \leq \delta$ gilt $||Ax - Ay||_W \leq \varepsilon$.

Aufgabe 3 (Beschränktheit linearer Operatoren) (4 Punkte)
Gibt es einen linearen Operator $A : V \to W$ mit normierten Räumen V, W, der nicht beschränkt ist? (Beweis oder Beispiel angeben!)

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Maschinen-Arithmetik) (4 Punkte)
Implementieren Sie die folgenden Funktionen für $x, y, z \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$ derart, dass die Reihenfolge der Teiloperationen der Klammerung entspricht und Fliesskommazahlen doppelter Genauigkeit verwendet werden:

$$f_1(x,y,z) = x(y+z) \qquad g_1(x,y,z) = x + (y+z) \qquad h(n,m) = (1/n)^m \, n^m - 1$$
$$f_2(x,y,z) = xy + xz \qquad g_2(x,y,z) = (x+y) + z$$

a) Ermitteln Sie die Differenz zwischen f_1 und f_2 für $x = e^{10}, y = \sin(1.57), z = \ln 2.71$, und erläutern Sie dies.

b) Ermitteln Sie die Differenz zwischen g_1 und g_2 für $x = 10^{-10}, y = 10^{10}, z = -y$ und erläutern Sie dies.

c) Bestimmen Sie die Werte von $h(n,m)$ für $m = 10, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 8$ in einer Schleife und erläutern Sie die Ergebnisse.