

Numerik partieller Differentialgleichungen

Probeklausur (keine Abgabe)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$(1+x)u_{xx}(x, y) + 2xyu_{xy}(x, y) + y^2u_{yy}(x, y) + u_x(x, y) = 0$$

hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist.

Aufgabe 2. Schreiben Sie in Pseudocode eine Implementierung des expliziten Eulerverfahrens für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0, & (x, t) &\in [0, L] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie das folgende Differenzenschema

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) \quad U_j^0 = u_0(j\Delta x)$$

zur numerischen Behandlung der Transportgleichung

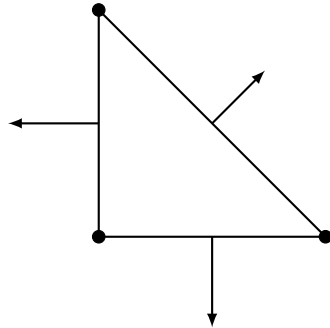
$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.
2. Führen Sie eine ℓ^2 -von Neumann-Stabilitätsanalyse durch.

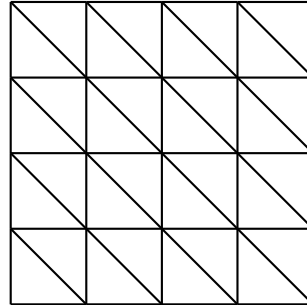
Aufgabe 4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Errechnen Sie die Gâteaux-Ableitung des folgenden Funktional

$$\mathcal{J}[u] = \frac{1}{2} \|u - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \quad u \in H^1(\Omega)$$

Aufgabe 5. In dieser Aufgabe wird das sogenannte Morley Element betrachtet:



1. Morley Element



2. Uniforme Triangulierung

Die Pfeile stehen dabei jeweils für die Auswertung der Normalenableitungen in den Kantenmittelpunkten.

1. Bestimmen Sie eine nodale Basis zu $\mathcal{P} = \Pi_2$.
2. Berechnen Sie einen Eintrag der Massematrix $L = (\int_{\Omega} \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x) dx)_{ij}$, wobei ϕ_i die im Knoten x_i lokalisierte Basisfunktion bezeichne und eine uniforme Triangulierung (vgl. rechte Abbildung) zu Grunde liege.

Aufgabe 6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$.

1. Definieren Sie den Raum $W^{1,p}(\Omega)$.
2. Betrachten Sie nun den Spezialfall $\Omega = B_1(0)$: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u(x) = \cos(\|x\|) \|x\|^\alpha$ Element von $L^p(\Omega)$ bzw. von $W^{1,p}(\Omega)$?

Hinweis: Verwenden Sie bei Bedarf (ohne Beweis) die Ungleichung $(a+b)^p \leq c(a^p + b^p)$, die für $a, b \geq 0$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 7. Sei $\Omega = [0, 1]$, $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten folgendes Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) &= f(x) & x \in \Omega \\ u(y) &= 0 & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

1. Stellen Sie die schwache Formulierung dieses Problems auf.
2. Beweisen Sie unter geeigneten Bedingungen an q die Existenz einer schwachen Lösung dieses Problems in $H_0^1(\Omega)$.
3. Leiten Sie das Cea-Lemma her und gewinnen Sie mit seiner Hilfe eine erste, einfache Fehlerabschätzung für den hier betrachteten Spezialfall.

4. Wir nehmen an, dass die Lösung des Problems

$$a(u, w) = (f, w)_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

für ein festes $f \in L^2(\Omega)$ der Abschätzung $|u|_{H^2(\Omega)} \leq C_R \|f\|_{L^2(\Omega)}$ mit einer Konstanten $C_R > 0$ genügt. Zeigen Sie, dass die Betrachtung des dualen Problems

$$\text{Gesucht ist } \varphi \text{ s.d. } a(\varphi, w) = (u - u_h, w)_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

zusammen mit der Abschätzung des Interpolationsfehlers $\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_I h |v|_{H^2(\Omega)}$ auf die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(C_I, C_R) h^2 |u|_{H^2(\Omega)}$$

führt, wobei $C(C_I, C_R) > 0$ eine Konstante ist, die (unter anderem) von den Konstanten $C_I, C_R > 0$ abhängt.

5. Nun werde die Diskretisierung der schwachen Formulierung mit linearen Ansatzfunktionen auf dem äquidistanten Gitter $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$ mit $x_i = i/N$ betrachtet. Der Operator $\ell(w) = (f, w)_{L^2(\Omega)}$ werde mit Hilfe der Mittelpunktsregel

$$\int_a^b h(x) dx \approx (b - a) h\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

diskretisiert. Erzielen Sie mit Hilfe des ersten Lemmas von Strang eine Abschätzung für den Fehler $\|u_h - u\|_{H^1}$.