

Numerik partieller Differentialgleichungen

Lösungsvorschlag der Probeklausur

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$(1+x)u_{xx}(x, y) + 2xy u_{xy}(x, y) + y^2 u_{yy}(x, y) + u_x(x, y) = 0$$

hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist.

Lösungsvorschlag: Wir betrachten die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \quad a(x, y) = 1+x, \quad b(x, y) = 2xy, \quad c(x, y) = y^2$$

Wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von M sind, dann gilt

$$\det(M) = \lambda_1 \lambda_2 = a(x, y)c(x, y) - \frac{1}{4}b(x, y)^2 = y^2(1+x-x^2)$$

und wir müssen drei Fälle unterscheiden:

1. Ist $y = 0$ oder $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist die Gleichung parabolisch, da dann $y^2(1+x-x^2) = 0$ gilt.
2. Der Fall $y^2(1+x-x^2) > 0$ tritt genau dann ein, falls

$$(x, y) \in \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \right) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

gilt. Unter diesen Umständen ist die Gleichung elliptisch.

3. In allen anderen Fällen ist die Gleichung hyperbolisch.

Aufgabe 2. Schreiben Sie in Pseudocode eine Implementierung des expliziten Eulerverfahrens für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0, & (x, t) &\in [0, L] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag: Seien $M, N \in \mathbb{N}$ mit $M, N > 0$. Setze $\Delta x = L/M$, $\Delta t = T/N$ und $c = \Delta t / (\Delta x)^2$. Das Verfahren (in Pseudocode) lässt sich dann wie folgt darstellen:

```

for j=0:M
    u(0,j) = f(jL/M);
end

for k=1:N
    u(k,0) = 0; u(k,M) = 0;
    for j=1:M-1
        u(k,j) = (1-2c)u(k-1, j) + u(k-1, j+1) + u(k-1, j-1);
    end
end

```

Aufgabe 3. Betrachten Sie das folgende Differenzenschema

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) \quad U_j^0 = u_0(j\Delta x)$$

zur numerischen Behandlung der Transportgleichung

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

$$u(0, x) = u_0(x)$$

1. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.
2. Führen Sie eine ℓ^2 -von Neumann-Stabilitätsanalyse durch.

Lösungsvorschlag: Mit Hilfe der Taylorentwicklung lässt sich für $u \in C^2$ zeigen, dass

$$u(t, x + \Delta x) = u(t, x) + u_x(t, x)\Delta x + u_{xx}(t, x)(\Delta x)^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

$$u(t, x - \Delta x) = u(t, x) - u_x(t, x)\Delta x + u_{xx}(t, x)(\Delta x)^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$$

Subtraktion der beiden Zeilen und anschließende Division durch Δx liefert folgende Approximation von u_x

$$\frac{1}{2\Delta x} [u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)] = u_x(t, x) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Für die Zeitableitung haben wir

$$u(t + \Delta t, x) = u(t, x) + u_t(t, x)\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} [u(t + \Delta t, x) - u(t, x)] = u_t(t, x) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Ersetzt man nun U_j^n in der Verfahrensvorschrift durch $u(t_n, x_j)$, nutzt die hergeleiteten Approximationen an die Orts- und Zeitableitung und macht von der Gleichung $u_t + au_x = 0$ Gebrauch, sieht man, dass Konsistenz von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$ vorliegt.

Wir machen nun den Ansatz $U_j^n = \lambda^n e^{-ij\Delta x}$, $\mu = \Delta t / \Delta x$ und setzen dies in die Verfahrensvorschrift ein:

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1} e^{-ij\Delta x} &= \lambda^n e^{-ij\Delta x} - \frac{a}{2} \mu (\lambda^{n+1} e^{-i(j+1)\Delta x} - \lambda^{n+1} e^{-i(j-1)\Delta x}) \\ &= \lambda^n e^{-ij\Delta x} \left(1 - \frac{a}{2} \mu \lambda (e^{-i\Delta x} - e^{i\Delta x})\right)\end{aligned}$$

Wegen $e^{-i\Delta x} - e^{i\Delta x} = -2i \sin(\Delta x)$, erhalten wir

$$\lambda = 1 - a\mu\lambda i \sin(\Delta x) \Leftrightarrow \lambda = (1 + a\mu i \sin(\Delta x))^{-1}$$

Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$ und es folgt

$$|\lambda|^2 = (1 + (a\mu)^2 \sin^2(\Delta x))^{-1} \leq 1$$

Die Analyse zeigt, dass das Verfahren uneingeschränkt stabil ist.

Aufgabe 4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Errechnen Sie die Gâteaux-Ableitung des folgenden Funktional

$$\mathcal{J}[u] = \frac{1}{2} \|u - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \quad u \in H^1(\Omega)$$

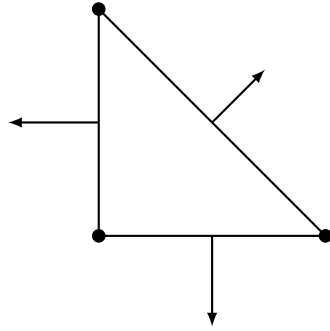
Lösungsvorschlag: Für $u, v \in H^1(\Omega)$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $u + tv \in H^1(\Omega)$. Unter Verwendung von $|\nabla u|^2 = \langle \nabla u, \nabla u \rangle$ und $\|u - u_0\|_{L^2}^2 = (u - u_0, u - u_0)_{L^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{J}[u + tv] \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \partial_t \left(\int_{\Omega} (u + tv - u_0)^2 \, dx + \lambda \int_{\Omega} \langle \nabla(u + tv), \nabla(u + tv) \rangle \, dx \right) \Big|_{t=0} \\ &= (u - u_0, v)_{L^2} + \lambda \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx\end{aligned}$$

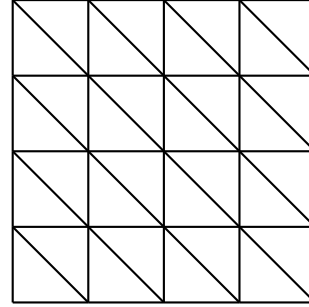
Aufgabe 5. In dieser Aufgabe wird das sogenannte Morley Element betrachtet:

Die Pfeile stehen dabei jeweils für die Auswertung der Normalenableitungen in den Kantenmittelpunkten.

1. Bestimmen Sie eine nodale Basis zu $\mathcal{P} = \Pi^2$.
2. Berechnen Sie einen Eintrag der Steifigkeitsmatrix $L = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x) \, dx \right)_{ij}$, wobei ϕ_i die im Knoten x_i lokalisierte Basisfunktion bezeichne und eine uniforme Triangulierung (vgl. rechte Abbildung) zu Grunde liege.



1. Morley Element



2. Uniforme Triangulierung

Lösungsvorschlag:

- Wir studieren zunächst die Basisfunktionen für den Spezialfall des Einheitsdreiecks. Eine Basisfunktion hat wegen der Wahl $\mathcal{P} = \Pi^2$ als Ansatzraum die Gestalt $\varphi_i(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$. Der Satz aus Funktionalen besteht aus Knotenauswertungen und der Auswertung der Normalenableitung in den Kantenmittelpunkten. Gemeinsam führt dies auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen des Typs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = e_i$$

für $i = 1, 2, \dots, 6$. Wir erhalten:

$$\psi_1(x, y) = 1 - x - y + 2xy$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2$$

$$\psi_3(x, y) = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$$

$$\psi_4(x, y) = -y + y^2$$

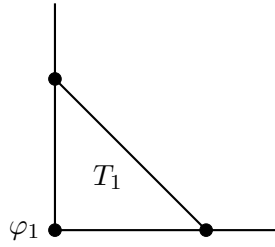
$$\psi_5(x, y) = -x + x^2$$

$$\psi_6(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}xy + \frac{y^2}{\sqrt{2}}$$

Ist T nun ein Dreieck, welches durch eine Abbildung $\Phi : T_{\text{ref}} \rightarrow T$ aus dem Einheitsdreieck hervorgeht, dann ist Hütchenfunktion $\varphi_{T,i}$ durch

$$\varphi_{T,i}(x, y) = \psi_i(\Phi^{-1}(x, y))$$

gegeben.



2. Wir betrachten die Funktion φ_1 , die wir uns dem Dreieck T_1 in der unteren linken Ecke zugeordnet denken.

Die Transformation $\Phi_1 : T_{\text{ref}} \rightarrow T_1$ die das Referenzdreieck auf T_1 abbildet, ist über die Skalierung $p \mapsto (\Delta x)p$ gegeben, wenn Δx die Gitterweite bezeichnet. Mit Hilfe des Transformationssatzes gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{T_1} \|\nabla \varphi_1(x)\|_2^2 dx &= \int_{T_{\text{ref}}} \|\nabla [\varphi_1(\Phi_1(x))]\|_2^2 |\det \Phi_1(x)| dx \\ &= \int_{T_{\text{ref}}} \left\| \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -1 + 2x_2 \\ -1 + 2x_1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 (\Delta x)^2 dx \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (-1 + 2x_2)^2 + (-1 + 2x_1)^2 dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{3(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$.

1. Definieren Sie den Raum $W^{1,p}(\Omega)$.
2. Betrachten Sie nun den Spezialfall $\Omega = B_1(0)$: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u(x) = \cos(\|x\|_2) \|x\|_2^\alpha$ Element von $L^p(\Omega)$ bzw. von $W^{1,p}(\Omega)$?

Hinweis: Verwenden Sie bei Bedarf (ohne Beweis) die Ungleichung $(a+b)^p \leq c(a^p + b^p)$, die für $a, b \geq 0$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

1. Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = 1$. Definiere die Normen $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ durch

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &:= \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &:= \max_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

und setze dann für $p \in \mathbb{R}$ oder auch $p = \infty$

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty\}$$

2. Außerhalb einer ε -Umgebung von 0 können wir $u(x)$ im klassischen Sinne differenzieren und die Regeln partieller Integration anwenden. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u \partial_i \varphi \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} u \partial_i \varphi \, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial(\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(0)})} u \nu_i \varphi \, d\sigma - \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u \varphi \, dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega} u \nu_i \varphi \, d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \nu_i \varphi \, d\sigma - \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u \varphi \, dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \nu_i \varphi \, d\sigma - \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u \varphi \, dx \right)
\end{aligned}$$

Für das erste Integral gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \nu_i \varphi \, d\sigma &\leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u \nu_i \varphi| \, d\sigma \leq c \varepsilon^\alpha \text{area}(\partial B_\varepsilon(0)) \\
&= \tilde{c} \varepsilon^{\alpha+d-1}
\end{aligned}$$

Konvergenz liegt im Fall $\alpha > 1 - d$ vor. Bedenkt man $\partial_i u = x_i [\alpha \cos(\|x\|_2) \|x\|_2^{\alpha-2} - \sin(\|x\|_2) \|x\|_2^{\alpha-1}]$, so gilt zusammen mit $|\partial_i u| \leq \alpha \|x\|_2^{\alpha-1} + \|x\|_2^\alpha$ für das zweite Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u \varphi \, dx &\leq \int_\varepsilon^1 \int_{S^{d-1}} (\alpha r^{\alpha-1} + r^\alpha) r^{d-1} |\varphi(r\theta)| \, dr \, d\varphi \\
&\leq C |S^{d-1}| \int_\varepsilon^1 (\alpha r^{\alpha+d-2} + r^{\alpha+d-1}) \, dr
\end{aligned}$$

Konvergenz für $\varepsilon \rightarrow 0$ liegt für $\alpha + d - 2 > -1$ vor, was genau dann gilt, wenn $\alpha > 1 - d$. Insgesamt ist die Existenz der schwachen Ableitung $\partial_i u$ für $\alpha > 1 - d$ gesichert.

Um die Bedingungen für $u \in L^p(\Omega)$ zu erarbeiten, betrachte

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p}^p &= \int_{B_1(0)} |u(x)|^p \, dx = \int_0^1 \int_{S^{d-1}} |u(r\varphi)|^p r^{d-1} \, d\varphi \, dr \\
&= \int_0^1 \int_{S^{d-1}} |\cos(r)|^p r^{\alpha p + d - 1} \, d\varphi \, dr \\
&\leq |S^{d-1}| \int_0^1 r^{\alpha p + d - 1} \, dr
\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist endlich, falls $\alpha p + d - 1 > -1$ gilt, also genau dann $\alpha > -\frac{d}{p}$. Wenn wir die vorherigen Abschätzungen bezüglich $\partial_i u$ und den Hinweis mit einbeziehen, sehen

wir

$$\begin{aligned}
\|\partial_i u\|_{L^p}^p &= \int_{\Omega} |\partial_i u|^p dx \leq \int_{\Omega} (\alpha \|x\|_2^{\alpha-1} + \|x\|_2^{\alpha})^p dx \\
&\leq c \int_{\Omega} \alpha^p \|x\|_2^{\alpha p - p} + \|x\|_2^{\alpha p} dx \\
&= c \int_0^1 \int_{S^{d-1}} (\alpha^p r^{\alpha p - p} + r^{\alpha p}) r^{d-1} d\varphi dr \\
&= c |S^{d-1}| \left(\int_0^1 \alpha^p r^{(\alpha-1)p + d-1} dr + \int_0^1 r^{\alpha p + d-1} dr \right)
\end{aligned}$$

Das erste Integral existiert unter der Bedingung $\alpha > \frac{p-d}{p}$, das zweite, falls $\alpha > -\frac{d}{p}$ erfüllt ist. Insgesamt gilt damit

$$\begin{aligned}
\alpha p > -d &\Rightarrow u \in L^p(\Omega) \\
\alpha p - p > -d &\Rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Sei $\Omega = [0, 1]$, $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten folgendes Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) &= f(x) & x \in \Omega \\ u(y) &= 0 & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

1. Stellen Sie die schwache Formulierung dieses Problems auf.
2. Beweisen Sie unter geeigneten Bedingungen an q die Existenz einer schwachen Lösung dieses Problems in $X = H_0^1(\Omega)$.
3. Sei $X_h \subset X$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Leiten Sie das Céa-Lemma her und gewinnen Sie mit seiner Hilfe eine erste, einfache Fehlerabschätzung für den hier betrachteten Spezialfall.
4. Wir nehmen an, dass die Lösung des Problems

$$a(u, w) = (f, w)_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

für ein festes $f \in L^2(\Omega)$ der Abschätzung $|u|_{H^2(\Omega)} \leq C_R \|f\|_{L^2(\Omega)}$ mit einer Konstanten $C_R > 0$ genügt. Zeigen Sie, dass die Betrachtung des dualen Problems

$$\text{Gesucht ist } \varphi \text{ s.d. } a(\varphi, w) = (u - u_h, w)_{L^2(\Omega)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

zusammen mit der Abschätzung des Interpolationsfehlers $\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_I h |v|_{H^2(\Omega)}$ auf die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(C_I, C_R) h^2 |u|_{H^2(\Omega)}$$

führt, wobei $C(C_I, C_R) > 0$ eine Konstante ist, die (unter anderem) von den Konstanten $C_I, C_R > 0$ abhängt.

5. Nun werde die Diskretisierung der schwachen Formulierung mit linearen Ansatzfunktionen auf dem äquidistanten Gitter $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$ mit $x_i = i/N$ betrachtet. Der Operator $\ell(w) = (f, w)_{L^2(\Omega)}$ werde mit Hilfe der Mittelpunktsregel

$$\int_a^b h(x) dx \approx (b-a) h\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

diskretisiert. Erzielen Sie mit Hilfe des ersten Lemmas von Strang eine Abschätzung für den Fehler $\|u_h - u\|_{H^1}$.

Lösungsvorschlag:

1. Multiplikation mit einer Testfunktion v und partielle Integration führen auf

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) + q(x) u(x) v(x) dx}_{=: a(u, v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f(x) v(x) dx}_{:= \ell(v)}$$

Das Problem hat dann folgende Form

Bestimme $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass $a(u, v) = \ell(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

2. Das Lemma von Lax-Milgram besagt, dass das Problem aus 1. eine eindeutige Lösung besitzt, sofern a eine koerzive, beschränkte Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$ ist und ℓ stetig von $H_0^1(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Die Stetigkeit von ℓ folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, denn

$$|\ell(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) v(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$$

Zum Nachweis der Stetigkeit von a betrachten wir

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) + q(x) u(x) v(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x) \nabla v(x) + q(x) u(x) v(x)| dx \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \int_{\Omega} |q(x) u(x) v(x)| dx \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \|q\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \max\{1, \|q\|_{L^\infty}\} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Diese Abschätzungen sind zulässig, sofern $q \in L^\infty(\Omega)$ ist, was wir nunmehr annehmen. Was die Koerzitivität angeht, gilt

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \|\nabla v(x)\|_2^2 + q(x) v(x)^2 dx \stackrel{\text{falls } q \geq 0}{\geq} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) \\ &\geq c \left(\int_{\Omega} v(x)^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) \end{aligned}$$

In die letzte Abschätzung floss dabei die Poincaré-Ungleichung ein. Wir fordern also zusätzlich zur Annahme $q \in L^\infty(\Omega)$, dass $q \geq 0$ sein soll. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, liefert das Lemma von Lax-Milgram die eindeutige Lösbarkeit des Problems.

3. Wir bezeichnen den zu Grunde liegenden Finite Elemente Raum mit X_h . Wegen Konformität gilt $X_h \subset X = H_0^1(\Omega)$. Das Céa-Lemma wird nun mit Hilfe dreier Zutaten hergeleitet:

- Koerzitivität von a : $a(v, v) \geq c\|v\|_{H^1}^2$
- Stetigkeit von a : $a(u, v) \leq C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$
- Galerkin-Orthogonalität: Erfüllen u und u_h die Gleichungen

$$\begin{aligned} a(u, v) &= l(v) \quad \forall v \in X \\ a(u_h, v_h) &= l(v_h) \quad \forall v_h \in X_h \end{aligned}$$

Gilt insbesondere $a(u, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$ und durch Differenzbildung

$$a(u_h - u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h$$

Mit ihrer Hilfe gilt:

$$\begin{aligned} c\|u_h - u\|_{H^1}^2 &\leq a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h - u, v_h - u) \\ &\leq C\|u_h - u\|_{H^1}\|v_h - u\|_{H^1} \\ &\Rightarrow \|u_h - u\|_{H^1} \leq \frac{C}{c} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} \end{aligned}$$

Wir haben bereits als Stetigkeitskonstante $C = \max\{1, \|q\|_{L^\infty}\}$ errechnet. Mit Aufgabe 4 auf Blatt 6 folgt weiter:

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \pi^2 \|v\|_{L^2}^2$$

Damit lassen sich die Rechnungen aus Aufgabenteil 2 verbessern und wir erhalten für die Koerzitivitätskonstante $c = \frac{1}{2}$. Insgesamt gilt dann

$$\|u_h - u\|_{H^1} \leq 2 \max\{1, \|q\|_{L^\infty}\} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1}$$

4. Wir verwenden folgende Aussagen:

- (a) Stetigkeit von a : $a(u, v) \leq C_S \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$.
- (b) Elliptische Regularität: $|u|_{H^2} \leq C_R \|f\|_{L^2(\Omega)}$ gilt für die Lösung von $a(u, v) = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.
- (c) Interpolationsabschätzung: $\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_I h |v|_{H^2(\Omega)}$.
- (d) Galerkin-Orthogonalität: $a(u_h - u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h$.
- (e) Aussage des Céa-Lemmas: $\|u - u_h\|_{H^1} \leq C_{\text{Cea}} \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{H^1}$.

Sei nun φ die Lösung des dualen Problems $a(w, \varphi) = (u - u_h, w)_{L^2} \quad \forall w \in H_0^1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= (u - u_h, u - u_h)_{L^2} = a(u - u_h, \varphi) \stackrel{(d)}{=} a(u - u_h, \varphi - \varphi_h) \\ &\stackrel{(a)}{\leq} C_S \|u - u_h\|_{H^1} \|\varphi - \varphi_h\|_{H^1} \end{aligned}$$

Da dies für alle φ_h gilt, folgt mit zweimaliger Anwendung des Céa Lemmas

$$\begin{aligned}
C_S \|u - u_h\|_{H^1} \|\varphi - \varphi_h\|_{H^1} &\stackrel{(e)}{\leq} C_S C_{\text{Céa}}^2 \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{H^1} \inf_{\varphi_h \in X_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{H^1} \\
&\leq C_S C_{\text{Céa}}^2 \|u - I_h u\|_{H^1} \|\varphi - I_h \varphi\|_{H^1} \\
&\stackrel{(c)}{\leq} C(C_S, C_{\text{Céa}}, C_I) h^2 |u|_{H^2} |\varphi|_{H^2} \\
&\stackrel{(b)}{\leq} C(C_S, C_{\text{Céa}}, C_I, C_R) h^2 |u|_{H^2} \|u - u_h\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Kürzen durch $\|u - u_h\|_{L^2}$ liefert dann die Behauptung.

5. Mit $\bar{x}_i := (x_i + x_{i-1})/2$ und $h_i := x_i - x_{i-1}$ haben wir

$$\begin{aligned}
|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) w_h(x) dx - h_i (f w_h)(\bar{x}_i) \right| \leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) w_h(x) dx - h_i (f w_h)(\bar{x}_i) \right| \\
&= \sum_{i=1}^N \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) w_h(x) - f(\bar{x}_i) w_h(\bar{x}_i) dx \right| \stackrel{\text{Taylor}}{\leq} \sum_{i=1}^N \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f w_h]'(\xi_i) (x - \bar{x}_i) dx \right| \\
&\leq \|f\|_{C^2} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (|w_h| + |w_h'|)(\xi_i) (x - \bar{x}_i) dx \\
&\leq \|f\|_{C^2} \sum_{i=1}^N (\|w_h\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)} + \|w_h\|_{H^1(x_{i-1}, x_i)}) \|x - \bar{x}_i\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)} \\
&\leq \|f\|_{C^2} \left(\sum_{i=1}^N \|w_h\|_{H^1(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C h \|f\|_{C^2} \|w_h\|_{C^2}
\end{aligned}$$

Geht man nun davon aus, dass $a_h(v_h, w_h)$ für $v_h, w_h \in X_h$ exakt berechenbar ist, dann liefert das erste Lemma von Strang

$$\begin{aligned}
\|u_h - u\|_{H^1} &\leq K \left[\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_{H^1}} \right] \\
&\leq K \left[\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} + h \tilde{C} \|f\|_{C^2} \right] \\
&\leq K \left[\tilde{C} h |u|_{H^2} + h \tilde{C} \|f\|_{C^2} \right] \\
&\leq c h (|u|_{H^2} + \|f\|_{C^2})
\end{aligned}$$