Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski

WS 17/18

Numerik partieller Differentialgleichungen

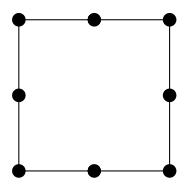
Blatt 9, Abgabe 14. 12. 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte). *Sei T ein Dreieck mit den Eckpunkten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ und $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$. Zeigen Sie, dass die Integrationsformel*

$$\int_T f(x)\ dx \approx \frac{|T|}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f(a_{ij})$$

auf $\Pi_2(T)$ exakt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Das rechteckige Element $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ mit $K = [0,1]^2$, $\mathcal{P} = \Pi_3$ wird als*



Serendipity Element *bezeichnet. Errechnen Sie die Nodale Basis für $\mathcal{P}$.*

Aufgabe 3 (8 Punkte). *Betrachten Sie die Poisson-Gleichung*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

für $f \in L^2(0,1)$ und die Diskretisierung ihrer schwachen Formulierung mit linearen Ansatzfunktionen über einem Gitter $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ mit $x_0 = 0$ und $x_N = 1$. Leiten Sie eine Abschätzung $\|u_h - u\|_{L^2} \leq Ch^2 |u|_{H^2}$ für $C > 0$ her. Verwenden Sie dabei lediglich, dass die Bilinearform aus der schwachen Formulierung stetig und koerzitiv ist.