

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 6, Abgabe 23. 11. 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte). *In der Vorlesung haben Sie die Beschränktheit und Koerzitivität der Bilinearform*

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v^t A \nabla u + v(b \cdot \nabla u) + q u v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v \, dx$$

unter folgenden Bedingungen gezeigt:

1. $A \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})$ mit $\xi^t A \xi \geq c \|\xi\|^2$ fast überall für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$,
2. $b \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit $|b(x)|^2 \leq 4 \tilde{c} q(x)$ fast überall in Ω für ein $\tilde{c} < c$,
3. $q \in L^{\infty}(\Omega)$ und $q \geq 0$ fast überall,
4. $p \in L^{\infty}(\Gamma_1)$ mit $p \geq 0$ fast überall,
5. $f \in L^2(\Omega)$, $q \in L^2(\Gamma_1)$.

Dabei war Ω ein Lipschitz-Gebiet mit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$, $\mu(\Gamma_2) > 0$. Statt Bedingung 2 lässt sich auch folgende Modifikation betrachten

$$\tilde{2}. \quad b \in W_0^{1,\infty}(\Omega), \quad q - \frac{1}{2} \operatorname{div} b \geq 0 \text{ fast überall in } \Omega.$$

Zeigen Sie die Koerzitivität von a unter Verwendung der Bedingungen 1, $\tilde{2}$, 3, 4, 5. Hinweis: Die Identität $v \nabla v = \frac{1}{2} \nabla(v^2)$ kann bei den Berechnungen hilfreich sein.

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Betrachten Sie folgende (elliptische) Bilinearform*

$$a(u, v) = \int_0^1 x^2 u'(x) v'(x) \, dx$$

auf dem Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$J(u) = \int_0^1 x^2 (u'(x))^2 \, dx - \int_0^1 u(x) \, dx \rightarrow \min$$

keine Lösung in $H_0^1(0, 1)$ besitzt.

Hinweis: Studieren Sie die zu Grunde liegende Differentialgleichung und ihre (eindeutige) Lösung u_{ε} zunächst auf $[\varepsilon, 1]$. Betrachten Sie dann das Verhalten von $J(u_{\varepsilon})$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Steht Ihr Ergebnis im Widerspruch zu der Aussage des Lemmas von Lax-Milgram?

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$. Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Beweisen Sie die Existenz einer schwachen Lösung in $H_0^1(\Omega)$ für $\alpha > 0$. Welche Schwierigkeiten erwarten Sie im Fall $\alpha < 0$?

Aufgabe 4 (6 Punkte). Sei $X := \{u \in C^1([0, 1]) \mid u(0) = 0, u'(1) = 1\}$ und $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$I(u) := \int_0^1 (u'(x))^2 \, dx$$

definiert. Betrachten Sie das Minimierungsproblem $\min_{u \in X} I(u)$.

1. Leiten Sie über die Berechnung der Gâteaux-Ableitung die Optimalitätsbedingung erster Ordnung her und geben Sie das zu Grunde liegende Randwertproblem an (bestehend aus partieller Differentialgleichung und Randbedingungen).
2. Zeigen Sie, dass kein $u \in X$ existiert, s.d.

$$I(u) = \inf_{v \in X} I(v).$$

3. Leiten Sie die schwache Formulierung des Randwertproblems her, welches Sie in 1. aufgestellt haben.
4. Da jedes Element von $H^1(0, 1)$ einen stetigen Repräsentanten besitzt, lässt sich eine punktweise Auswertung eines Elements von $H^1(0, 1)$ sinnvoll interpretieren. Garantieren Sie mit Mitteln der Vorlesung die Existenz einer eindeutigen Lösung u des schwachen Randwertproblems in $\mathcal{H} = \{u \in H^1(0, 1) \mid u(0) = 0\}$. Folgern Sie, dass für diese $u = \min_{v \in \mathcal{H}} I(v) - v(1)$ gilt.