Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski

WS 17/18

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 5, Abgabe 16. 11. 2017

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

1. *$f \in L^1_{loc}$ besitze eine schwache partielle Ableitung $\partial_{x_i} f \in L^1_{loc}(\Omega)$, ψ sei ein Element von $C^\infty(\Omega)$. Unter diesen Bedingungen ist ψf schwach partiell nach x_i differenzierbar und es gilt*

$$\partial_{x_i}(\psi f) = (\partial_{x_i}\psi) f + \psi(\partial_{x_i} f)$$

2. *Betrachtet wird die Heaviside-Funktion*

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass H keine *schwache Ableitung in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ besitzt. Zeigen Sie zu diesem Zweck, dass sich für eine schwache Ableitung ∂H und ein gegebenes $0 < c < 1$ ein $\varepsilon > 0$ finden ließe, welches*

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\partial H(x)| \, dx < c$$

erfüllte. Betrachten Sie anschließend die Definition der schwachen Ableitung für ∂H und ein $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(v) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\max_x v(x) = v(0) = 1$.

3. *Betrachten Sie die Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto x|y|$$

Zeigen Sie, dass im schwachen Sinne $\partial_1^2 \partial_2 f$ existiert, $\partial_2^2 \partial_1 f$ hingegen nicht. Beachten Sie dabei Aufgabenteil (2).

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** *Berechnen Sie die Gâteaux-Ableitung von folgenden Funktionalen*

- *für feste $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 : C^\infty(\Omega, \Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_\Omega |(u \circ \varphi)(x) - v(x)|^2 \, dx \end{aligned}$$

- *für einen Hilbertraum H, einen beschränkten linearen Operator $A : H \to H$ und ein fest gewähltes Element $b \in H$*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 : H &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|Ax - b\|_H^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** *Betrachtet wird das Anfangswertproblem für die Wellengleichung*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

- *Zeigen Sie (ohne Beweis der Eindeutigkeit), dass*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right]$$

  die eindeutige Lösung des oben genannten Anfangswertproblems ist.

- *Betrachten Sie die Finite-Differenzen-Diskretisierung*

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} &= c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_i^0 = \varphi_i,\ u_i^0 &= u_i^1 \end{aligned}$$

  Leiten Sie die CFL-Bedingung für diese Diskretisierung her, in dem Sie die numerische und analytische Domain of Dependence *bestimmen.*

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** *Sei Ω eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Leiten Sie eine schwache Formulierung des Problems*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für Elemente von $\mathcal{H} = \{v \in H^2(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0\}$ und ein festes $f \in L^2(\Omega)$ her.