Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski WS 17/18

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 4, Abgabe 9. 11. 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte). *Beweisen Sie folgenden Aussagen:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *habe positives, endliches Maß. Gilt* $p_0 \leq p_1$, *so ist* $L^{p_1}(\Omega) \subset L^{p_0}(\Omega)$.
- *Für zwei Elemente* $f, g \in L^p(\Omega)$ *gilt die* Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

Nehmen Sie der Einfachheit halber $1 < p < \infty$ *an und nutzen Sie die Hölder-Ungleichung sowie die Identität*

$$|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$$

Aufgabe 2 (2 Punkte). *In der Vorlesung wurden verschiedene Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösung der Transportgleichung eingeführt. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung folgender Methoden:*

- *Verfahren mit zentralen Differenzen,*
- *Lax-Friedrichs-Verfahren,*
- *Lax-Wendroff-Verfahren.*

Aufgabe 3 (4 Punkte). *Betrachtet wird die* $2D$ *Transportgleichung*

$$\dot{u} + au_x + bu_y + cu = f, \quad a, b \geq 0, \quad \Omega = \mathbb{R}^2$$

und ihre Diskretisierung

$$\frac{u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m}{\Delta t} + A_{ij}^m \frac{u_{ij}^m - u_{i-1j}^m}{\Delta x} + B_{ij}^m \frac{u_{ij}^m - u_{ij-1}^m}{\Delta y} + C_{ij}^m u_{ij}^m = F_{ij}^m$$

Leiten Sie eine Aussage zur ℓ^∞ *Stabilität dieses Verfahrens her. Folgen Sie dabei dem entsprechenden Teil der Vorlesung, in dem der eindimensionale Fall behandelt wurde.*

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, 4 Punkte)**.** *Gegeben sei das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} 2u_x + u_t &= -3\sin(x+t), \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) &= 2 + \cos x \end{aligned}$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Lax-Friedrichs-Verfahrens eine näherungsweise Lösung, wobei Sie x und t auf geeignete Intervalle einschränken sollten. Vergleichen Sie die Resultate mit der analytischen Lösung

$$u(x,t) = 2 + \cos(x+t)$$