Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski

WS 17/18

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 2, Abgabe 26. 10. 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte). *In der Vorlesung wurde ein Satz zur Konsistenzordnung des θ-Verfahrens formuliert, welcher besagt, dass $T_j^m \in \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ für das Crank-Nicolson Verfahren gilt. Beweisen Sie diese Aussage unter Beachtung des Hinweises aus der Vorlesung.*

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Betrachtet wird das θ-Verfahren für $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und Gitterweiten Δt, Δx_1, Δx_2. In dieser Aufgabe soll der Spezialfall $\theta = 1$ betrachtet werden. Zeigen Sie, dass das Verfahren uneingeschränkt ℓ^∞ stabil ist und für den Abschneidefehler $T_j^m \in \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)$ gilt.*

Aufgabe 3 (4 Punkte). *In der Vorlesung wurde das Maximumsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung formuliert:*

> *Sei $u_t - \Delta u = f \leq 0$. Dann gilt*
>
> $$\max_{(t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}} u(t,x) = \max_{t=0 \vee x\in\partial\Omega} u(t,x)$$
>
> *bzw. im Fall $u_t - \Delta u = f \geq 0$*
>
> $$\min_{(t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}} u(t,x) = \min_{t=0 \vee x\in\partial\Omega} u(t,x)$$

Ergänzen Sie den Beweis aus der Vorlesung um den Beweis der zweiten Aussage und folgern Sie, dass für zwei Lösungen u_1, u_2 des Problems

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) &= g(t),\ u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

(für gegebene f, g und h) $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ für alle $x \in [0,L]$ und $t \geq 0$ gelten muss.

Aufgabe 4 ((Programmieraufgabe) 4 Punkte)**.** *Betrachten Sie auf* $[0, L] \times [0, T]$ *das Problem*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= -\left(1 - \frac{\pi^2}{L^2}\right) e^{-t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= \sin(\pi x / L) \end{aligned}$$

Implementieren Sie in Matlab das θ*-Verfahren für die Lösung dieses Problems und vergleichen Sie die Ergebnisse für verschiedene Schrittweiten mit der exakten Lösung*

$$u(x,t) = e^{-t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$