Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski WS 17/18

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 10, Abgabe 21. 12. 2017

Aufgabe 1 (2 Punkte). *In der Vorlesung wurde die* distributionelle Ableitung *eines Elements $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ über die Bedingung*

$$D^\alpha f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \varphi), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert. Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die distributionelle Ableitung $D^k H$ von

$$H : \mathbb{R} \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{falls } x < 0 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Betrachten Sie die schwache Formulierung der Poisson-Gleichung*

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx \quad \forall\, v \in H_0^1(0,1)$$

mit $f \in L^2(0,1)$. Zu ihrer Diskretisierung seien lineare Ansatzfunktionen auf einem Gitter $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ mit $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$ vorgegeben. Zur numerischen Behandlung der Integrale soll die Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

verwendet werden. Schätzen Sie den Fehler $\|u_h - u\|_{H^1}$ mit Hilfe des ersten Lemmas von Strang ab.

Aufgabe 3 (10 Punkte). *Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck aus einer $\frac{1}{\rho}$-quasiuniformen Triangulierung, $E \subset T$ eine Kante. Beweisen Sie folgende Ungleichungen (C ist in jeder Ungleichung eine Konstante; geben Sie jeweils explizit an, wie die Konstante von ρ abhängt).*

1. *(Spur-Ungleichung) Für alle $v \in H^1(T)$ gilt*

$$\|v\|_{L^2(E)} \leq C\left(h_T^{-1/2}\|v\|_{L^2(T)} + h_T^{1/2}\|\nabla v\|_{L^2(T)}\right).$$

2. *(Poincaré-Ungleichung) Für alle $v \in H_0^1(T)$ gilt*

$$\|v\|_{L^2(T)} \leq C h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}.$$

3. *Für alle $v \in H^1(T)$ gilt folgende Variante der Poincaré-Ungleichung,*

$$\|v - \overline{v}\|_{L^2(T)} \ \leq \ C h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}, \qquad \overline{v} = \frac{1}{|T|} \int_T v(x)\ dx\,.$$

4. *(Inverse Ungleichung) Für jedes Polynom $p \in \Pi^k(T)$, $k \geq 1$, gilt*

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \leq C h_T^{-1} \|p\|_{L^2(T)}\,.$$

5. *(Diskrete Spur-Ungleichung) Für jedes Polynom $p \in \Pi^k(T)$, $k \geq 1$, gilt*

$$\|p\|_{L^2(E)} \leq C h_T^{-1/2} \|p\|_{L^2(T)}\,.$$

   Geben Sie für $k = 0$ eine explizite Schranke für C an.