Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski WS 17/18

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 1, Abgabe 19. 10. 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *In der Vorlesung haben Sie die semidiskrete Fourier-Transformation behandelt: Für eine Gitterfunktion U, definiert auf $(\Delta x)\mathbb{Z}$, wurde*

$$\hat{u} : [-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}] \to \mathbb{C}, \quad \hat{u}(k) = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j e^{-ikx_j}$$

gesetzt. Dabei war $x_j = j\Delta x$. Beweisen Sie folgende Identitäten:

1. ***Parseval-Gleichung:***
$$\|\hat{u}\|_{L^2} \ = \ \sqrt{2\pi}\|U\|_{l^2}$$

2. ***Faltungssatz:*** *Wir definieren die* Faltung *$v * w$ von zwei Gitterfunktionen v und w durch*
$$(v * w)_m = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_{m-j} w_j \ = \ \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j w_{m-j}$$
Beweisen Sie die Gültigkeit der Aussage: Für $u \in \ell^2_{\Delta x}$ und $v \in \ell^1_{\Delta x}$ ist $u * v \in \ell^2_{\Delta x}$ und es gilt
$$\widehat{u * v}(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *In der Vorlesung wurde das θ-Verfahren für die 1D-Wärmeleitungsgleichung eingeführt. Betrachtet wird die Anwendung dieses Verfahrens auf das Problem*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= f(x,t), \qquad\qquad t > 0, x \in [0, L] \\ u_x(0,t) &= 0, \ u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= \phi(x) \end{aligned}$$

Führen Sie eine ℓ^2 Stabilitätsanalyse für das θ-Verfahren in Abhängigkeit der Parameter $\theta, \Delta x, \Delta t$ durch, d.h., leiten Sie - in Abhängigkeit von θ - Bedingungen an Δx und Δt her, unter denen Sie ein ℓ^2 stabiles Verfahren erhalten.