Prof. Dr. B. Wirth WS 17/18
Paul Striewski

Numerik partieller Differentialgleichungen

Anwesenheitsblatt (keine Abgabe)

Aufgabe 1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Betrachtet werden folgende partielle Differentialgleichungen:*

1. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{\sqrt{5}}u_y = 0$
2. $xyu_{xx} + x^2u_{xy} - 100yu_x = 0$
3. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 2x^2y$
4. $(x^2-1)u_{xx} - xu_x + 2xyu_{xy} + (y^2-1)u_{yy} - yu_y = -1$
5. $2u_{xx} + \frac{1}{2}u_{yy} = f(x, y)$

für $(x, y) \in \Omega$, $u(x, y) \in C^2(\Omega)$. Bestimmen Sie jeweils, in welchen Bereichen die Gleichungen hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sind.

Aufgabe 2. *Seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge mit abschnittsweise glattem Rand. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die folgenden Identitäten*

$$\int_\Omega \Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n u \; d\sigma$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_{\partial\Omega} u\partial_n v \; d\sigma - \int_\Omega u\Delta v \; dx$$

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} u\partial_n v - v\partial_n u \; d\sigma$$

Aufgabe 3. *In der Vorlesung wurde der folgende Satz bewiesen:*

> *u genüge der Gleichung $u_t - u_{xx} = f$ auf $[0, \infty[\times\Omega$, wobei entweder $\Omega = \mathbb{R}$ gelte oder im Fall $\Omega = [a, b]$ zusätzlich $u|_{\partial\Omega} = 0$ gefordert werde. Unter diesen Bedingungen gilt folgende Ungleichung*
>
> $$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^2} + \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{L^2} \; ds$$

Verallgemeinern Sie diesen Satz in geeigneter Weise auf den Fall $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$.

Aufgabe 4. *Betrachtet wird die Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t(x,y,t) &= \Delta u(x,y,t) + f(x,y,t) \quad \textit{auf} \;\; \Omega \times [0,T] \\ u(x,y,0) &= g(x,y), \quad u(\cdot,\cdot,t)|_{\partial\Omega} = u(\cdot,\cdot,0)|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

mit $\Omega = [a,b] \times [c,d]$. *Geben Sie (in Pseudocode) eine Implementierung des expliziten Eulerverfahrens zur näherungsweisen Bestimmung der Lösung dieser Gleichung an.*