

Numerik partieller Differentialgleichungen I

Einführung

- Übersicht pDgln. 2. Ordnung
(Klassifikation, klassische Modellprobleme)
- Übersicht wichtigste Diskretisierungskonzepte
(Finite Differenzen, Finite Elemente, Finite Volumen)

Finite Differenzen

- Bsp. Wärmeleitung
(Stabilitätskonzepte, Konvergenz)
- Bsp. Transportgleichung
(Stabilität, Konvergenz, Dissipation)

Finite Elemente

- Bsp. Poissongleichung
(Assemblierung, a priori Fehlerabschätzung)
- Adaptivität
(Gitterverfeinerung, a posteriori Fehlerabschätzung)

Partielle Differentialgleichung

Def: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $d \geq 2$. Eine partielle Differentialgleichung (pDgl) ist eine Gleichung, die eine Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und ihre partiellen Ableitungen verknüpft,

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

$F: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d} \times \dots \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. k ist die Ordnung der pDgl, u die gesuchte Fkt.

Bsp: Laplace - Gleichung $\partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2 = 0$

Def: Ein pDgl-Problem ist eine pDgl. mit Randbedingungen auf $\Gamma \subset \partial\Omega$

- Dirichlet - RB : $u = g$ auf Γ (g gegeben)
- Neumann - RB : $n^T A \nabla u = g$ auf Γ ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär, n = Normale an Γ)
- Robin - RB : $u + n^T A \nabla u = g$ auf Γ

Es ist zu lösen für $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Bsp: Laplace - Gleichung mit $u(x) = x_1$ auf $\partial\Omega$ hat Lsg. $u(x) = x_1$.

Einführung: pDgln. 2. Ordnung

Klassifikation pDgln. 2. Ordnung

Notation: $\cdot u_{x_n} = \partial u / \partial x_n, \quad u_{x_n x_2} = \partial^2 u / \partial x_n \partial x_2, \dots$

$$\cdot D u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d}), \quad \nabla u = D u^T$$

$$\cdot \Delta u = \operatorname{div} \nabla u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_d x_d}$$

$\cdot \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ heißt Multindex der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

$$D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}$$

$\cdot$ Mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ & $x_1, \dots, x_d$ bezeichnen wir üblicherweise nur räumliche Variablen; ist eine Variable die Zeit, nennen wir sie t und nehmen $[0, T] \times \Omega$ als das Gebiet der Dgl.; außerdem $\dot{u} = u_t$

Wir betrachten hier nur semilineare pDgln: $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + c(\nabla u(x), u(x), x) = 0$

Def: Die pDgl. heißt elliptisch, falls $A = (a_{ij})_{i,j}$ positiv definit ist

$\cdot$ parabolisch, falls A pos. semidefinit ist mit einem 0-Eigenwert

$\cdot$ hyperbolisch, falls A einen positiven & $d-1$ negative Eigenwerte hat

Einführung: pDgl. 2. Ordnung

Energieminimierung: Elliptische Dgl.

Elliptische pDgl. entspringen dem physikalischen Prinzip der Energieminimierung:
Ein physikalisches System nimmt den Zustand minimaler Energie an.

Sei u der Zustand, $E(u)$ die Energie $\Rightarrow E(u+\varphi) \geq E(u) \quad \forall \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Bsp: Die potentielle Energie einer elektrischen Ladungsverteilung $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
(oder einer elastischen Membran mit transversaler Auslenkung u
oder einer Temperaturverteilung u) in einem elektrischen Feld f ist
 $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f u dx$. Auf $\partial\Omega$ ist $u = g$ festgelegt.

$$E(u+\varphi) - E(u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{\Omega} f \varphi dx$$

partielle Integration $\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u \cdot n dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 - \varphi \operatorname{div} \nabla u dx + \int_{\Omega} f \varphi dx \stackrel{!}{\geq} 0 \quad \forall \varphi \text{ mit } \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega$

$\Rightarrow$ Poissonsgleichung $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u = f$ mit Dirichlet-RB $u = g$ auf $\partial\Omega$

Gradientenfluss: Parabolische Dgl.

Ein physikalisches System muss erst zum Energieminimum gelangen.

Parabolische pDgl. entspringen dem physikalischen Prinzip des Gradientenflusses:

Zu jedem Zeitpunkt bewegt sich der Zustand in die Richtung, die die schnellste Energieabnahme (bei gleichem Aufwand) erlaubt.

Sei $\tau D(\frac{\varphi}{\tau})$ der Aufwand der Änderung $u \rightarrow u + \varphi$ in Zeit τ

$$\Rightarrow \quad u = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\operatorname{argmin}_{\varphi} \tau D(\frac{\varphi}{\tau}) + E(u + \varphi) \right) / \tau$$

Bsp: Eine Ladungs- (Auslenkungs- / Temperatur-) Änderung kostet $D(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx$.

$$\tau D(\frac{\varphi + \tilde{\varphi}}{\tau}) + E(u + \varphi + \tilde{\varphi}) - [\tau D(\frac{\varphi}{\tau}) + E(u + \varphi)] = \int_{\Omega} \frac{\varphi \tilde{\varphi}}{\tau} + \frac{\tilde{\varphi}^2}{2\tau} + \frac{|\nabla \tilde{\varphi}|^2}{2} + \nabla(u + \varphi) \cdot \nabla \tilde{\varphi} + f \tilde{\varphi} dx$$

$$= \int_{\Omega} \tilde{\varphi} \left(\frac{\varphi}{\tau} - \Delta(u + \varphi) + f \right) dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\varphi} \nabla(u + \varphi) \cdot n dx + O(\tilde{\varphi}^2) \geq 0 \quad \forall \tilde{\varphi} \text{ mit } \tilde{\varphi} = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{\tau} = \Delta(u + \varphi) - f \Rightarrow \varphi \rightarrow 0 \text{ für } \tau \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{Wärmeleitungsgleichung } u_t - \Delta u = -f \text{ mit Dirichlet RB } u = g \text{ auf } \partial\Omega, u = u_0 \text{ für } t = 0$$

Einführung: pDgln. 2. Ordnung

Erhaltungsgleichung: Hyperbolische Dgl.

Hyperbolische pDgl. entspringen oft dem physikalischen Erhaltungsprinzip:

Die Änderung einer extensiven Zustandsgröße (z.B. Masse, Impuls, Energie) in einem Volumen V ist nur durch Transport über ∂V möglich.

Sei $q(x,t)$ die Flussdichte der Zustandsgrößen-Dichte $\rho \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho(x,t) dx = - \int_{\partial V} q(x,t) \cdot n dx$

$$\Rightarrow 0 = \int_V \dot{\rho} + \operatorname{div} q \, dx \quad \forall V \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} + \operatorname{div} q = 0$$

Satz von Gauss

Bsp: Ein Material mit Masse-Verteilung ρ bewege sich mit Geschwindigkeit $v(x,t)$ (z.B. durch Wind bewegtes Wasser in den Wolken). $\Rightarrow q = v\rho$

$\Rightarrow$ Transportgleichung $\dot{\rho} + \operatorname{div}(v\rho) = 0$ mit RB $\rho = \rho_0$ für $t = 0$.

Bsp: Die kinetische + potentielle Energiedichte einer gespannten Membran mit Auslenkung u ist $\rho(x,t) = \frac{m}{2} |\dot{u}|^2 + E \frac{|\nabla u|^2}{2}$ (m = Membran-Massendichte, E = Elastizitätsmodul), der Energiefluss ist $q = -E \dot{u} \nabla u \Rightarrow \dot{\rho} = m \ddot{u} + E \nabla u \cdot \nabla \dot{u} = E \operatorname{div}(\dot{u} \nabla u)$
 $\Rightarrow$ Wellengleichung $\ddot{u} = \frac{E}{m} \Delta u$ mit RB $u = g$ auf $\partial\Omega$, $u = u_0$ für $t = 0$

Einführung: pDgl. 2. Ordnung

Reduktion hyperbolischer pDgl. 2. zu 1. Ordnung in 2D

$$ü - \partial^2 u / \partial x^2 = f(u, ü, \partial u / \partial x, x, t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v} + \partial v / \partial x = f(u, ü, \partial u / \partial x, x, t) \\ ü - \partial u / \partial x = v \end{cases}$$

= System gekoppelter Transportgleichungen 1. Ordnung

$$,, \partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x) "$$

Hängt f nur von x & t ab, kann man erst

$$\dot{v} + \partial v / \partial x = f(x, t)$$

lösen und danach

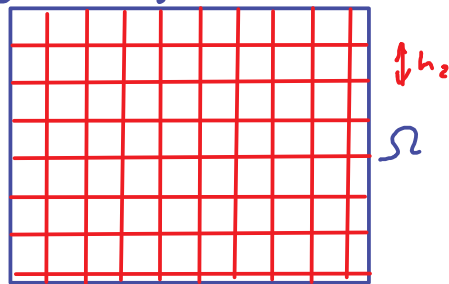
$$ü - \partial u / \partial x = v$$

$\Rightarrow$ wir werden nur hyperbolische pDgl. 1. Ordnung betrachten.

Einführung: Diskretisierungskonzepte

Finite Differenzen

Hat man auf Ω ein regelmäßiges Gitter mit Gitterweite $h_1, \dots, h_d$ in $x_1, \dots, x_d$ -Richtung,



Können die Ableitungen einer ausreichend oft differenzierbaren Funktion u als Differenzenquotienten approximiert werden.

Bsp.: $\frac{\partial u}{\partial x_1} \approx \frac{u(x_1+h_1) - u(x_1)}{h_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \approx \frac{u(x_2+h_2) - 2u(x_2) + u(x_2-h_2))}{h_2^2}$

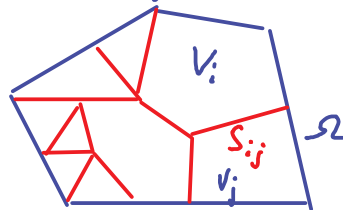
Wir suchen eine Approximation $u_{i_1 \dots i_d}$ an $u(\underbrace{i_1 h_1, \dots, i_d h_d}_{\text{Gitterpunkte}})$

$\Rightarrow$ Wir ersetzen in der pDgl. alle Ableitungen durch Diff.-quotienten und erhalten einen Satz an Gleichungen in den $u_{i_1 \dots i_d}$

Bsp.: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(t=0, x) = e^{-x^2} \leadsto \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = 0$, $u_{0,j} = e^{-j^2 h_2^2} \forall i > 0, j$

Finite Volumen

Auf einem Gitter aus Volumenelementen V_i und deren Seiten S_{ij}



Kann das Erhaltungsprinzip auf jedes Element angewandt werden. Ist f_{ik} der Mittelwert von f auf V_i zur Zeit $t_k = k\Delta t$ und $\tilde{q}(f_{ik}, f_{jk}, x, t)$ eine Approximation an den Fluss durch S_{ij} , so folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{V_i} f(x, t) dx = - \int_{\partial V_i} q(x, t) \cdot n dx$$

Normale von V_i zu V_j

$$\leadsto f_{i,k+1} - f_{ik} = \frac{-\Delta t}{|V_i|} \sum_j |S_{ij}| \tilde{q}(f_{ik}, f_{jk}, x, t) \cdot n_{ij} \quad \forall k, i$$

ein Satz Gleichungen für die f_{ik} .

Bsp: $\dot{p} + \text{div}(vp) = 0, p(t=0, x) = e^{-x^2}$

$$\leadsto f_{i,k+1} - f_{ik} = \frac{-\Delta t}{|V_i|} \sum_j |S_{ij}| v(x_{ij}, k\Delta t) \cdot n_{ij} \frac{f_{ik} + f_{jk}}{2}, \quad f_{i0} = \int_{V_i} e^{-x^2} dx \quad \forall k > 0, i$$

Galerkin-Verfahren/Finite Elemente

Sei V ein endlichdimensionaler Teilraum des Raums aller Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit Basis $\phi_1, \dots, \phi_k$. Statt auf F kann das Energieminimierungsprinzip auch auf V angewandt werden:

$$u = \operatorname{argmin}_{v \in F} E(v) = \text{Lsg. der zugehörigen elliptischen pDgl.}$$

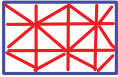
$$\rightarrow \hat{u} = \sum_{i=1}^k u_i \phi_i = \operatorname{argmin}_{v \in V} E(v) = \text{Approximation der pDgl-Lsg.}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial u_i} E\left(\sum_{i=1}^k u_i \phi_i\right) \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$\hat{u}$ heißt Galerkin-Approximation. Sind die ϕ_i lokal (d.h. $\operatorname{supp} \phi_i \cap \operatorname{supp} \phi_j = \emptyset$ für die meisten i, j) ergibt sich der Spezialfall der Finiten Elemente.

Bsp: $\Delta u = 0$ auf Ω , $u(x) = g(x)$ auf $\partial\Omega$

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} dx$$

Dreiecksgitter , V aufgespannt durch  $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$

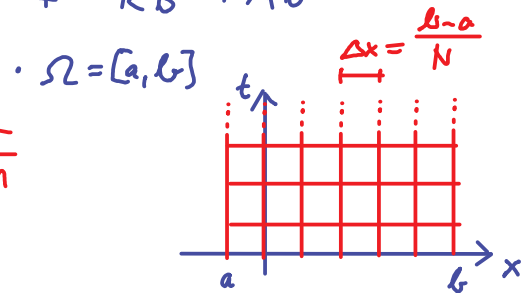
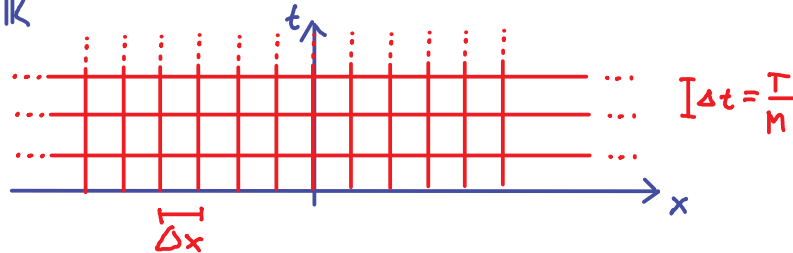
$$\rightarrow \sum_{j=1}^k \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx u_j = 0 \quad \forall i \text{ mit } x_i \notin \partial\Omega, \quad u_i = g(x_i) \text{ sonst}$$

Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

theta-Methode

$$u_t = u_{xx} \text{ auf } [0, T] \times \Omega \quad + \text{ RB } + \text{ AB}$$

Gitter: $\cdot \Omega = \mathbb{R}$



Explizites Euler-Verfahren:

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = \frac{U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow U_j^{m+1} = U_j^m + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m)$$

Implizites Euler-Verfahren:

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = \frac{U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow U_j^{m+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}) = U_j^m$$

θ -Verfahren: $\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta \frac{U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2}$

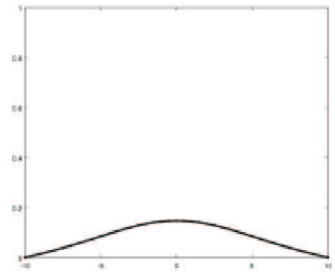
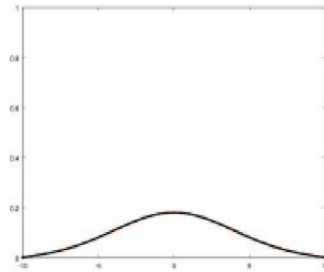
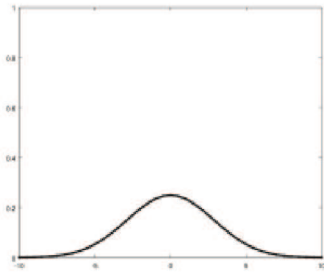
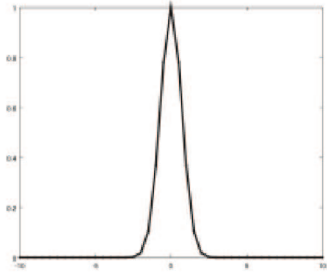
$\theta = 0$: expl. Euler ; $\theta = 1$: impl. Euler ; $\theta = \frac{1}{2}$: Crank-Nicolson

Anfangsbedingung (AB): $U_j^0 = u(t=0, x_j)$; Dirichlet-RB: $U_0^m = u(t^m, a)$, $U_N^m = u(t^m, b)$

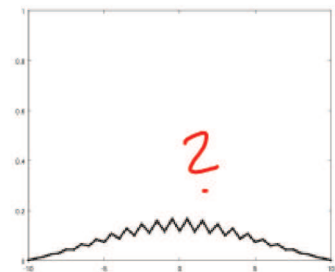
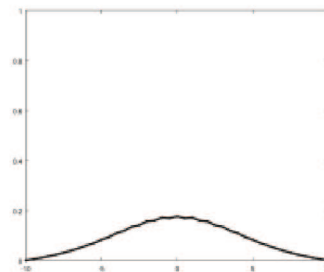
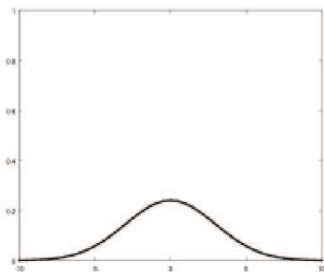
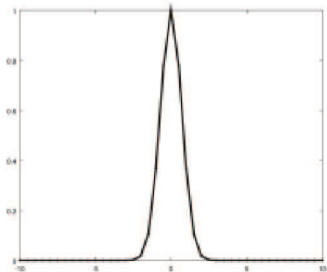
Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

Beispielrechnung $u_t = u_{xx}$ auf $\Omega = [-10, 10]$, $u(t=0, x) = e^{-x^2}$, $u(t, \partial\Omega) = u(0, \partial\Omega)$

expl. Euler, $\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 0,12$



expl. Euler, $\Delta x = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 0,13$



Fourier-Transformation & Satz von Plancherel/Parseval

Def: Fouriertransformation (FT) von $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$: $\hat{u}(\xi) = F[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx$

Def: L^2 -Norm von $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$: $\|u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$
 $L^2(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ messbar, } \|u\|_{L^2} < \infty\}$

Thm: Inverse FT (IFT) von $\hat{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$: $u(x) = F^{-1}[\hat{u}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

Bew: $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(\tilde{x}) e^{-i\tilde{x}\xi} d\tilde{x} e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-\tilde{x})\xi} d\xi u(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} u(\tilde{x}) \delta(\tilde{x}-x) d\tilde{x}$
 $\Rightarrow$ mache rigoros mittels Glättungs- & Approximationsargument □

Thm: (Satz von Plancherel/Parseval) $\|\hat{u}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L^2}$

$\Rightarrow \frac{F}{\sqrt{2\pi}}$ ist Isometrie von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$

Bew: $\cdot \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) v(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx v(\xi) d\xi$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v(\xi) e^{-ix\xi} d\xi u(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \hat{v}(x) dx$$

$\cdot$ wähle $v(\xi) = \overline{\hat{u}(\xi)} = 2\pi F^{-1}[\bar{u}](\xi)$ □

L2-Stabilität

Stabilität $\hat{=}$ geringe Perturbation in Daten (z.B. RB oder rechte Seite der pDgl.) erzeugt geringe Änderung der Lösung

Messung der Perturbationsstärke in verschiedenen Normen

$\Rightarrow$ Stabilität bzgl. versch. Normen

$$\left. \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = f, \quad u(t=0) = u_0 \\ \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}, \quad \tilde{u}(t=0) = \tilde{u}_0 \end{array} \right\} \Rightarrow v = \tilde{u} - u \text{ löst } v_t - v_{xx} = \tilde{f} - f, \quad v(t=0) = \tilde{u}_0 - u_0$$

Thm: u löse $u_t - u_{xx} = f$ auf $[0, \infty) \times \Omega$ ($\Omega = \mathbb{R}$ oder $\Omega = [a, b]$ mit 0-Dirichlet-RB)

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u(t=0)\|_{L^2} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} ds$$

Bew.: für $\Omega = [a, b]$, $2\|u\|_{L^2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2} = 2 \int_{\Omega} u \Delta u dx = 2 \int_{\Omega} u (\Delta u + f) dx = 2 \int_{\Omega} -|u|^2 + u f dx \leq 2 \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$

· für $\Omega = \mathbb{R}$, $F[u_t - u_{xx} - f](\xi) = \hat{u}_t(\xi, t) - (i\xi)^2 \hat{u}(\xi, t) - \hat{f}(\xi, t)$

$$\Rightarrow \forall \xi: \frac{d}{dt} \hat{u} = -\xi^2 \hat{u} + \hat{f} \Rightarrow 2\|\hat{u}\|_{L^2} \frac{d}{dt} \|\hat{u}\|_{L^2} = 2 \int_{\Omega} -\xi^2 |\hat{u}|^2 + \bar{\hat{u}} \hat{f} d\xi \leq 2 \|\hat{u}\|_{L^2} \|\hat{f}\|_{L^2}$$

· in beiden Fällen $\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$

□

Semidiskrete Fourier-Transformation

Def: Die semidiskrete FT einer auf dem unendlichen Gitter $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$, definierten Funktion U ist

$$\hat{U}: [-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{U}(k) = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j e^{-ikx_j}.$$

Def: ℓ_2 -Norm von $U: \mathbb{Z} \subset \Delta x \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$: $\|U\|_{\ell^2} = \left(\Delta x \sum_{x_j \in \mathbb{Z}} |U_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Thm: Inverse semidiskrete FT ist $U_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{U}(k) e^{ikx_j} dk$

Thm: (Parseval) $\|\hat{U}\|_{\ell^2} = \sqrt{2\pi} \|U\|_{\ell^2}$

I2-Stabilität

θ -Methode für $u - \Delta u = f$:

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{U_{j-1}^m - 2U_j^m + U_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta \frac{U_{j-1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1}, \quad U_j^0 = 0_j$$

$$\frac{\tilde{U}_j^{m+1} - \tilde{U}_j^m}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{\tilde{U}_{j-1}^m - 2\tilde{U}_j^m + \tilde{U}_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta \frac{\tilde{U}_{j-1}^{m+1} - 2\tilde{U}_j^{m+1} + \tilde{U}_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)\tilde{F}_j^m + \theta\tilde{F}_j^{m+1}, \quad \tilde{U}_j^0 = \tilde{0}_j$$

$\Rightarrow \tilde{u} - u$ löst selbe Gleichungen für Daten $\tilde{F} - F$ & AB $\tilde{0} - 0$.

$\Rightarrow$ für Stabilität betrachte (wie zuvor) Norm der Lsg. als Fkt. der Daten & AB.

Thm: $U = (U_j^m)_{j \in \mathbb{Z}}^{m \geq 0}$ löse (*) (auf $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap [a, b]$ mit 0-Dirichlet-RB).

Falls $(1-2\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$, $\|U\|_{\ell^2} \leq \|0\|_{\ell^2} + \Delta t \left(\sum_{k=1}^{m-1} \|F^k\|_{\ell^2} + \theta \|F^m\|_{\ell^2} + (1-\theta) \|F^0\|_{\ell^2} \right)$.

„Verfahren ist ℓ^2 -stabil“.

Quadratur für $\int_0^{m\Delta t} dt$

Kor: Impl. Euler- & Crank-Nicolson-Verfahren sind uningeschränkt ℓ^2 -stabil, expl. Euler-Verfahren ist bedingt stabil (für $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$).

Bew.: Abkürzung $\mu = \Delta t / \Delta x^2$

$z = \mathbb{Z}$: Setze $U_j^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ikj\Delta x} \hat{U}^m(k) dk$ ein

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ikj\Delta x} \frac{\hat{U}^{m+1} - \hat{U}^m}{\Delta t} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} (1-\theta) \frac{e^{ik(j-1)\Delta x} - 2e^{ikj\Delta x} + e^{ik(j+1)\Delta x}}{\Delta x^2} \hat{U}^m$$

$$+ \theta \frac{e^{ik(j-1)\Delta x} - 2e^{ikj\Delta x} + e^{ik(j+1)\Delta x}}{\Delta x^2} \hat{U}^{m+1} + e^{ikj\Delta x} [(1-\theta) \hat{F}^m + \theta \hat{F}^{m+1}] dk$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ikj\Delta x} \left[\hat{U}^{m+1} (1 - \theta\mu(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x})) - \hat{U}^m (1 + (1-\theta)\mu(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x})) \right.$$

$$\left. + \Delta t [(1-\theta) \hat{F}^m + \theta \hat{F}^{m+1}] \right] dk$$

$$\Rightarrow \hat{U}^{m+1}(k) = \frac{1 + (1-\theta)\mu(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x})}{1 - \theta\mu(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x})} \hat{U}^m(k) - \frac{\Delta t [(1-\theta) \hat{F}^m(k) + \theta \hat{F}^{m+1}(k)]}{1 - \theta\mu(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x})}, k \in \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right]$$

$-4\sin^2(k\Delta x/2)$

$$\Rightarrow \|\hat{U}^{m+1}\|_{L^2} \leq \max_k \left| \frac{1 - (1-\theta)4\mu\sin^2(\frac{k\Delta x}{2})}{1 + \theta4\mu\sin^2(\frac{k\Delta x}{2})} \right| \|\hat{U}^m\|_{L^2} + \Delta t [\theta \|\hat{F}^{m+1}\|_{L^2} + (1-\theta) \|\hat{F}^m\|_{L^2}]$$

$$\leq 1 \Leftrightarrow (1-2\theta)\mu \leq \frac{1}{2}$$

$$\cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap [a, b]: \quad U^{m+1} = (I + \theta \mu L)^{-1} \left[(I - (1-\theta) \mu L) U^m + \theta \Delta t F^{m+1} + (1-\theta) \Delta t F^m \right]$$

$$U^m = \begin{pmatrix} u_1^m \\ \vdots \\ u_{N-1}^m \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \dots & -1 \\ & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$$

Nach Satz von Gerschgorin ist L pos. semidefinit mit Eigenwerten $\in [0, 4]$.

$$\Rightarrow \|U^{m+1}\|_{\ell^2} \leq \underbrace{\|(I + \theta \mu L)^{-1} (I - (1-\theta) \mu L)\|}_{\leq \max_{\text{Eigenwert } \lambda} \left| \frac{1 - (1-\theta)\mu\lambda}{1 + \theta\mu\lambda} \right|} \|U^m\|_{\ell^2} + \underbrace{\|(I + \theta \mu L)^{-1}\|}_{\leq 1} \Delta t [\theta \|F^{m+1}\|_{\ell^2} + (1-\theta) \|F^m\|_{\ell^2}]$$

≤ 1 falls $(1-2\theta)\mu \leq \frac{1}{2}$

per Induktion folgt in beiden Fällen

$$\|U^m\|_{\ell^2} \leq \|U^0\|_{\ell^2} + \Delta t \left(\sum_{k=1}^{m-1} \|F^k\|_{\ell^2} + \theta \|F^m\|_{\ell^2} + (1-\theta) \|F^0\|_{\ell^2} \right) \quad \square$$

l2-von Neumann-Stabilität

Stabilitätsanforderungen sind typischerweise am stärksten auf $Z = \mathbb{Z}$, da dort alle Frequenzen k auftreten, während ein endliches Gitter nur endlich viele Frequenzen / Eigenmoden besitzt. Formal können wir die l^2 -Stabilität prüfen, indem wir $u_j^m = [\lambda(k)]^m e^{ijk\Delta x}$ ins Verfahren mit $F_j^- = 0$ einsetzen und $|\lambda(k)| \leq 1$ fordern.

Def: Das Verfahren heißt l^2 -von Neumann-stabil, wenn ein $C > 0$ existiert sodass $\|u^m\|_{l^2} \leq C \left[\|u^0\|_{l^2} + \Delta t \sum_{k=0}^m \|F^k\|_{l^2} \right]$, $m = 1, \dots, M = T/\Delta t$.

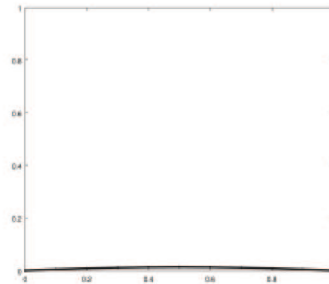
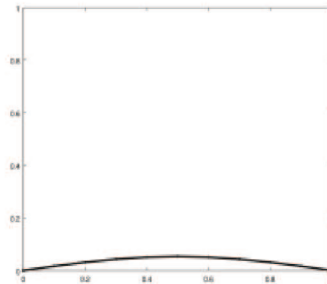
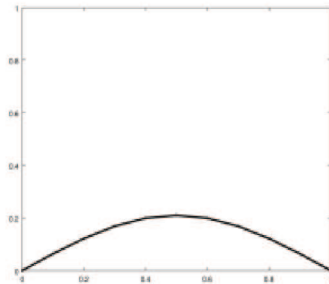
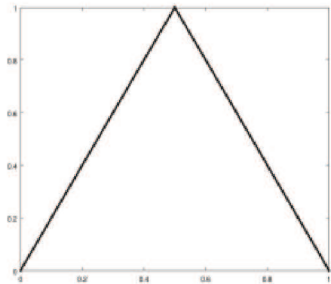
Thm: Das θ -Verfahren ist l^2 -von Neumann-stabil falls $(1-2\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} + c\Delta t$.

Bew: HA $\left(\text{nutze } (1+c\Delta t)^m \leq \left(1 + \frac{cT}{M}\right)^M \leq e^{cT} \right) \quad \square$

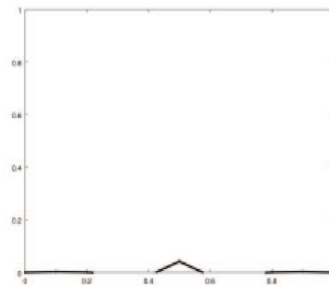
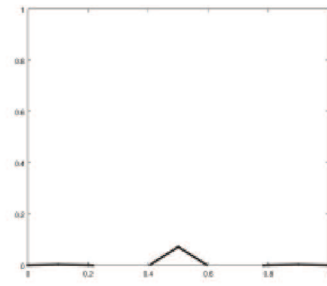
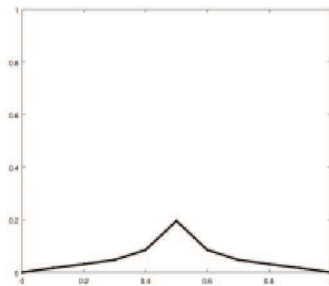
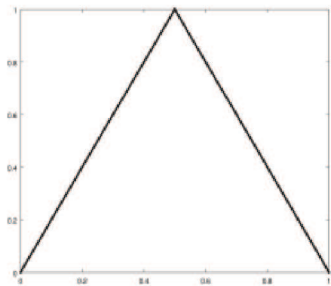
Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

Beispielrechnung

$u_t = u_{xx}$ on $[0, T] \times [0, 1]$, $u(0, x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$, $u(t, \{0, 1\}) = 0$
impl. Euler $\Delta t = \Delta x = \frac{1}{10}$



Crank-Nicolson $\Delta t = \Delta x = \frac{1}{10}$



Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

L^∞ -Stabilität: Maximumprinzip

$$\Omega = (a, b); \quad \begin{cases} u - u_{xx} = f, & u|_{t=0} = u_0, & u(\cdot, a) = u_a, & u(\cdot, b) = u_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \tilde{u} - u \text{ löst } v - v_{xx} = 0, \\ v|_{t=0} = \tilde{u}_0 - u_0, & v(\cdot, a) = \tilde{u}_a - u_a, & v(\cdot, b) = \tilde{u}_b - u_b \end{cases}$$

Thm: (Maximumprinzip) Sei $u - \Delta u = f \leq 0$, dann $\max_{(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} u(t,x) = \max_{t=0 \vee x \in \partial\Omega} u(t,x)$.

Bew.: Sei $u(t,x)$, $t \in (0,T]$, $x \in \Omega$ ein lok. Maximum $\Rightarrow u_x = 0$, $u_t \geq 0$, $u_{xx} \leq 0$

• ist $f(t,x) < 0$, folgt $0 > f = u_t - u_{xx} \geq 0 \quad \text{↯}$

• ist $f(t,x) \leq 0$, setze $v(t,x) = u(t,x) + \frac{\varepsilon}{2} x^2 \Rightarrow v - v_{xx} = f - \varepsilon < 0$

$\Rightarrow v$ nimmt mit vorigem Argument Maximum auf $\underbrace{\{0\} \times \Omega \cup (0,T] \times \partial\Omega}_{=: \mathcal{P}}$ an

$$\Rightarrow u(t,x) \leq v(t,x) \leq \max_{(t,x) \in \mathcal{P}} v(t,x) \leq \max_{(t,x) \in \mathcal{P}} u(t,x) + \varepsilon \max_{(t,x) \in \mathcal{P}} (|a|, |b|)^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{(t,x) \in \mathcal{P}} u(t,x)$$

• analog für Minima □

Kor: (L^∞ -Stabilität) $\|\tilde{u} - u\|_{L^\infty} = \sup_{x,t} |\tilde{u}(t,x) - u(t,x)| \leq \max \left(\|\tilde{u}_0 - u_0\|_{L^\infty}, \|\tilde{u}_a - u_a\|_{L^\infty}, \|\tilde{u}_b - u_b\|_{L^\infty} \right)$

$$\quad \quad \quad \sup_{x \in \Omega} |\tilde{u}_i(x) - u_i(x)| \quad \quad \quad \sup_{t \in (0,T)} |\tilde{u}_a(t) - u_a(t)|$$

Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (1D Wärmeleitung)

l^∞ -Stabilität: diskretes Maximumprinzip

θ -Methode für $u - \Delta u = f$: ($\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$)

(*)

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j-1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0^m = A_j^m \\ u_N^m = B_j^m \\ u_j^0 = 0_j \end{array} \right.$$

Ist $\tilde{u}_j^m$ die Lsg. für Daten F & AB $\tilde{O}$ & RB $\tilde{A}, \tilde{B}$,

so löst $\tilde{u} - u$ die Gl. für Daten 0, AB $\tilde{O}-O$ & RB $\tilde{A}-A, \tilde{B}-B$

$\Rightarrow$ für Stabilität bzgl. AB & RB untersuche, wie $\|\tilde{u} - u\|$ von $\|\tilde{A} - A\|, \|\tilde{B} - B\|, \|\tilde{O} - O\|$ abhängt

Thm: (Diskretes Maximumprinzip) u löst (*) mit $F=0$ für $\theta \in [0,1]$ & $\mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2}$. Dann
 $\min \{u_j^m \mid m=0 \vee j=0 \vee j=N\} \leq u_j^m \leq \max \{u_j^m \mid m=0 \vee j=0 \vee j=N\} \quad \forall j, m$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } (1+2\theta\mu)u_j^{m+1} &= \underbrace{\theta\mu(u_{j+1}^{m+1} + u_{j-1}^{m+1})}_{\geq 0} + (1-\theta)\mu(u_{j+1}^m + u_{j-1}^m) + \underbrace{(1-2(1-\theta)\mu)u_j^m}_{\geq 0} \\ &\leq 2\theta\mu \underbrace{u^*}_{\max(u_{j+1}^{m+1}, u_{j-1}^{m+1}, u_{j+1}^m, u_{j-1}^m, u_j^m)} + 2(1-\theta)\mu u^* + (1-2(1-\theta)\mu)u^* \leq (1+2\theta\mu)u^* \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es kann kein striktes Maximum geben für $m \neq 0$ & $j \notin \{0, N\}$ (analog für Minimal) $\square$

Kor: (l^∞ -Stabilität) $\theta \in [0,1], \mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2}$. $\|u - \tilde{u}\|_{l^\infty} = \max_{j,m} |u_j^m - \tilde{u}_j^m| \leq \max(\|\tilde{A} - A\|_{l^\infty}, \|\tilde{B} - B\|_{l^\infty}, \|\tilde{O} - O\|_{l^\infty})$.

l^∞ -Stabilität bzgl. Datenterm

Beachte: l^∞ -Stabilität hat stärkere Bedingungen an μ als l^2 -Stabilität.

Crank-Nicolson-Verfahren: l^2 -stabil $\forall \mu$, l^∞ -stabil für $\mu \leq 1$.

Thm: U löse (*) mit $A = B = 0 = 0$ für $\theta \in [0, 1]$, $\mu(1-\theta) \leq \frac{1}{2}$, dann $\|U\|_{l^\infty} \leq T \|F\|_{l^\infty}$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } (1+2\theta\mu)U_j^{m+1} &= \theta\mu(U_{j+1}^{m+1} + U_{j-1}^{m+1}) + (1-\theta)\mu(U_{j+1}^m + U_{j-1}^m) + (1-2(1-\theta)\mu)U_j^m + \Delta t[(1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1}] \\ &\leq 2\theta\mu\|U^{m+1}\|_{l^\infty} + 2(1-\theta)\mu\|U^m\|_{l^\infty} + (1-2(1-\theta)\mu)\|U^m\|_{l^\infty} + \Delta t\|F\|_{l^\infty} \end{aligned}$$

$$\text{Bilde Maximum über } j \Rightarrow \|U^{m+1}\|_{l^\infty} \leq \|U^m\|_{l^\infty} + \Delta t\|F\|_{l^\infty}$$

$$\Rightarrow \|U^m\|_{l^\infty} \leq \|U^0\|_{l^\infty} + m\Delta t\|F\|_{l^\infty} \leq T\|F\|_{l^\infty}, \quad m = 1, \dots, M$$

□

Konsistenz: Abschneidefehler

Def: Sei $u_j^m = u(t_m, x_j)$ für geakt. Lsg. u . Der Abschneidefehler für das θ -Verfahren ist

$$T_j^m = \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} - (1-\theta) \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2} - \theta \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2} - (1-\theta)f_j^m - \theta f_j^{m+1}$$

Wie groß ist der Abschneidefehler? Wir nehmen an, u löst $u - u_{xx} = f$ und ist ausreichend oft differenzierbar, und wir führen Taylorentwicklung durch.

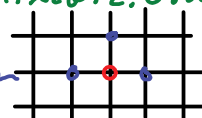
$$u_j^{m+1} = u_j^m + u_t(t_m, x_j) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (\text{analog für } f)$$

$$u_{j\pm 1}^m = u_j^m \pm u_x(t_m, x_j) \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx}(t_m, x_j) \Delta x^2 \pm \frac{1}{6} u_{xxx}(t_m, x_j) \Delta x^3 + O(\Delta x^4)$$

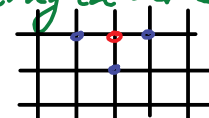
$$\Rightarrow \text{Expl. Euler-Verf.: } T_j^m = u_t + O(\Delta t) - u_{xx} + O(\Delta x^2) - f_j^m = O(\Delta t + \Delta x^2)$$

Thm: (Konsistenzordnung) Das θ -Verfahren erfüllt $T_j^m = \begin{cases} O(\Delta t + \Delta x^2), & \theta \neq \frac{1}{2} \\ O(\Delta t^2 + \Delta x^2), & \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$,
d.h. es ist konsistent 2. Ordnung im Ort & 1. bzw. 2. Ordnung in der Zeit.

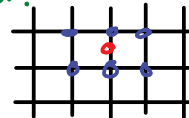
Bew: HA; beachte: Taylorentw. am leichtesten um



expl. Euler



imp. Euler



CN □

$\Rightarrow$ Nur C-N-Verf. ist 2. Ordn. konsistent in Zeit!

Konvergenz (Konsistenz + Stabilität)

falls $\theta = 0$
wähle $F_j^m = T_j^m$

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j-1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)F_j^m + \theta F_j^{m+1}$$

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j-1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)f_j^m + \theta f_j^{m+1} + T_j^m$$

Setze $e_j^m = u_j^m - u_j^m \Rightarrow \frac{e_j^{m+1} - e_j^m}{\Delta t} = (1-\theta) \frac{e_{j-1}^m - 2e_j^m + e_{j+1}^m}{\Delta x^2} + \theta \frac{e_{j-1}^{m+1} - 2e_j^{m+1} + e_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} - T_j^m$

$\Rightarrow e$ löst θ -Verfahren mit O-AB & O-RB & Daten $F_j^0 = F_j^1 = -T_j^0, F_j^m = -\frac{T_j^m - (1-\theta)T_j^{m-1}}{\theta}$

Thm: u (glatt) löse $u_t - u_{xx} = f$ mit AB & RB; u_j^m löse zugehöriges θ -Verfahren mit $\theta \in [0, 1]$

$\cdot \|u^m - u^m\|_{\ell^2} = \begin{cases} O(\Delta t + \Delta x^2) & , \theta \neq \frac{1}{2} \\ O(\Delta t^2 + \Delta x^2) & , \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ falls $(1-2\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, m=1, \dots, M$

$\cdot \|u^m - u^m\|_{\ell^\infty} = \begin{cases} O(\Delta t + \Delta x^2) & , \theta \neq \frac{1}{2} \\ O(\Delta t^2 + \Delta x^2) & , \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ falls $(1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, m=1, \dots, M$

Bew: $\Rightarrow$ ^{Stabilität} $\|e^m\|_{\ell^2} \leq \Delta t \left(\sum_{k=2}^{m-1} \|F^k\|_{\ell^2} + \theta \|F^m\|_{\ell^2} + (1-\theta) \|F^0\|_{\ell^2} \right) \leq T_{\max_{m=1, \dots, M}} \|F^m\|_{\ell^2}$

$\|e^m\|_{\ell^\infty} \leq T \|F\|_{\ell^\infty}$

^{Konsistenz} $\Rightarrow \|e^m\|_{\ell^2}, \|e^m\|_{\ell^\infty} \leq O(\Delta t + \Delta x^2)$

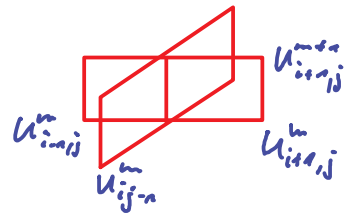
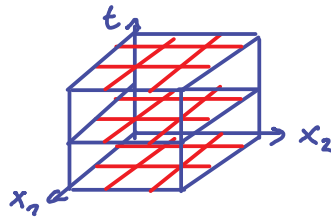
$\Rightarrow$ Stabilität + Konsistenz = Konvergenz!

□

Zusammenfassung 2D-Gebiet

$$u - \Delta u = f \text{ auf } \Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

mit AB & RB



Thm: 1) Das θ -Verfahren für $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ mit Gitterweiten $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2$

$$\text{und } \mu_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x_1^2}, \mu_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x_2^2}, \theta \in [0, 1], \text{ ist}$$

- L^2 -stabil für $(1-2\theta)(\mu_1 + \mu_2) \leq \frac{1}{2}$,
- L^∞ -stabil für $(1-\theta)(\mu_1 + \mu_2) \leq \frac{1}{2}$,

2) es ist konsistent mit Abschneidefehler

- $T_j^n = O(\Delta t + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)$ für $\theta \neq \frac{1}{2}$
- $T_j^n = O(\Delta t^2 + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)$ für $\theta = \frac{1}{2}$

3) es ist konvergent gleicher Ordnung in der L^2/L^∞ -Norm, wenn es in dieser stabil ist.

Bew: HA $\square$

Alternating Direction Implicit (ADI) method

$$u_t - \Delta u = 0$$

Schreibe $\delta_1^2 U_{ij}^m = U_{i-1,j}^m - 2U_{ij}^m + U_{i+1,j}^m$; analog δ_2^2

Crank-Nicolson: $\left(1 - \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2 - \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2\right) U_{ij}^{m+1} = \left(1 + \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2 + \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2\right) U_{ij}^m$

Def: ADI-Verf.: $\left(1 - \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2\right) U_{ij}^{m+1} = \left(1 + \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2\right) U_{ij}^m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2\right) U_{ij}^{m+1/2} = \left(1 + \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2\right) U_{ij}^m & | \left(1 + \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2\right) \cdot \dots \\ \left(1 - \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2\right) U_{ij}^{m+1} = \left(1 + \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2\right) U_{ij}^{m+1/2} & | \left(1 - \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2\right) \cdot \dots \end{cases} (*)$$

ADI unterscheidet sich von CN nur durch die Terme $\frac{\tau}{4} \mu_1 \mu_2 \delta_1^2 \delta_2^2$.

Es hat den Vorteil, dass die zu lösenden Gleichungssysteme (mit Matrizen $1 - \frac{\tau}{2} \mu_1 \delta_1^2$ und $1 - \frac{\tau}{2} \mu_2 \delta_2^2$) tridiagonal sind und somit durch den Thomas-Algorithmus leicht gelöst werden können (bei CN sind die Matrizen viel komplizierter)!

Thm: Das ADI-Verfahren ist l^2 -stabil und für $\mu_1, \mu_2 \leq 1$ auch l^∞ stabil. Es ist konsistent und konvergiert 2. Ordnung in Ort und Zeit.

Bew: HA; nutze (*) zur Herleitung der Stabilität.

□

Ausblick: Nichtlineare pDgl.

Für nichtlineare pDgl. ist Stabilität des Verfahrens oft kompliziert zu zeigen.

Bsp: $u_t = \Delta u + 2u(1-u^2) + f$ kann diskretisiert werden durch

$$U_{ij}^{m+1} - U_{ij}^m = \mu_1 \delta_x^2 U_{ij}^{m+1} + \mu_2 \delta_y^2 U_{ij}^{m+1} - 2\Delta t (U_{ij}^{m+1})^3 + 2\Delta t U_{ij}^m + \Delta t F_{ij}^m$$

Für U gilt nicht das Maximumprinzip (auch nicht für u), allerdings gilt:

Thm: $\|U^m\|_{\ell^\infty} \leq \max(1, \|U^0\|_{\ell^\infty}, \max_{x_{ij} \in \partial\Omega, n \leq m} |U_{ij}^n|) + T \|F\|_{\ell^\infty}$

Bew: Sei $U_{ij}^{m+1} > 1$, dann $U_{ij}^{m+1} (1 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\Delta t) \leq U_{ij}^{m+1} (1 + 2\mu_1 + 2\mu_2) + 2\Delta t (U_{ij}^{m+1})^3$
 $= U_{ij}^m + \mu_1 (U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i+1,j}^{m+1}) + \mu_2 (U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m+1}) + 2\Delta t U_{ij}^m + \Delta t F_{ij}^m$
 $\leq (1 + 2\Delta t) \|U^m\|_{\ell^\infty} + \Delta t \|F\|_{\ell^\infty} + 2(\mu_1 + \mu_2) \|U^{m+1}\|_{\ell^\infty}$

$$\Rightarrow \|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} \leq \max(1, \max_{x_{ij} \in \partial\Omega} |U_{ij}^{m+1}|) \quad \text{oder} \quad \|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} \leq \|U^m\|_{\ell^\infty} + \Delta t \|F\|_{\ell^\infty}$$

$$\Rightarrow \|U^{m+1}\|_{\ell^\infty} \leq \max(1, \max_{x_{ij} \in \partial\Omega, n \leq m} |U_{ij}^n|, \|U^m\|_{\ell^\infty} + \Delta t \|F\|_{\ell^\infty})$$

$\Rightarrow$ Ergebnis folgt per Induktion. □

Finite Differenzen: Parabolische pDgl. (2D Wärmeleitung)

Ausblick: Nichtlineare pDgl.

Mit solchen Beschränktheitsresultaten lässt sich alles auf den linearen Fall zurückführen.

Thm: (Stabilität) $\tilde{u}$ sei die Lsg. für $\tilde{F}$ und gleiche AB & RB. Dann gilt für Δt klein genug (abhängig von $\|F\|_{\ell^\infty}, \|\tilde{F}\|_{\ell^\infty}, AB, RB$): $\|\tilde{u} - u\|_{\ell^\infty} \leq 2T \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty}$

Bew: $v = \tilde{u} - u$ erfüllt

$$\begin{aligned} v_{ij}^{m+1} - v_{ij}^m &= \mu_1 \delta_1^2 v_{ij}^{m+1} + \mu_2 \delta_2^2 v_{ij}^{m+1} - 2\Delta t \left[\underbrace{\left(\tilde{u}_{ij}^{m+1} \right)^3 - \left(u_{ij}^{m+1} \right)^3}_{\tilde{u}_{ij}^{m+1} \left(\tilde{u}_{ij}^{m+1} \right)^2 + \tilde{u}_{ij}^{m+1} u_{ij}^{m+1} + \left(u_{ij}^{m+1} \right)^2} \right] + 2\Delta t v_{ij}^m + \Delta t (\tilde{F}_{ij}^m - F_{ij}^m) \\ &= v_{ij}^{m+1} \left(\left(\tilde{u}_{ij}^{m+1} \right)^2 + \tilde{u}_{ij}^{m+1} u_{ij}^{m+1} + \left(u_{ij}^{m+1} \right)^2 \right) =: v_{ij}^{m+1} B_{ij}^{m+1} \end{aligned}$$

Nun Standard-Argument für linearen Fall:

$$\begin{aligned} v_{ij}^{m+1} (1 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\Delta t B_{ij}^{m+1}) &= v_{ij}^m + \mu_1 (v_{i-1,j}^{m+1} + v_{i+1,j}^{m+1}) + \mu_2 (v_{i,j-1}^{m+1} + v_{i,j+1}^{m+1}) + 2\Delta t v_{ij}^m + \Delta t (\tilde{F}_{ij}^m - F_{ij}^m) \\ \Rightarrow \|v^{m+1}\|_{\ell^\infty} (1 - 2\Delta t \|B\|_{\ell^\infty}) &\leq \|v^m\|_{\ell^\infty} (1 + 2\Delta t) + \Delta t \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty} \end{aligned}$$

$2\|B\|_{\ell^\infty} \leq \tilde{C}$ hängt nur von $F, \tilde{F}, AB$ & RB ab. Ist $\Delta t < \frac{1}{4\|B\|_{\ell^\infty}}$, folgt

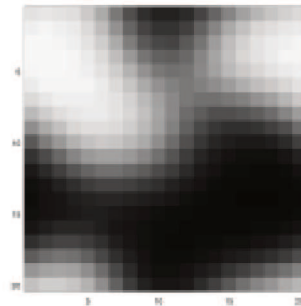
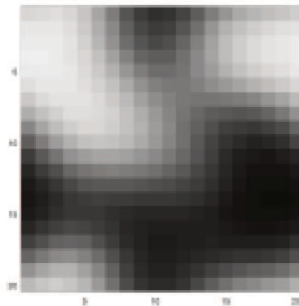
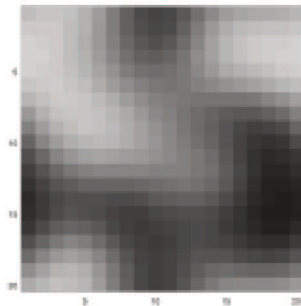
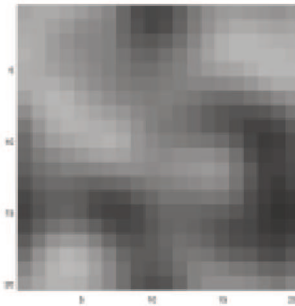
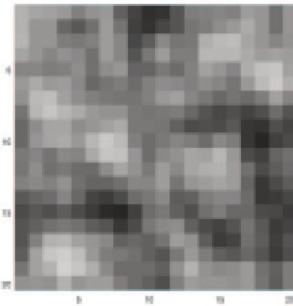
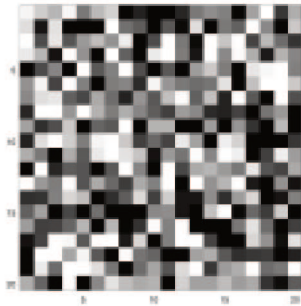
$$\begin{aligned} \|v^{m+1}\|_{\ell^\infty} &\leq \|v^m\|_{\ell^\infty} (1 + 2\Delta t + 2\tilde{C}\Delta t) + 2\Delta t \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty} \leq \\ &\|v^0\|_{\ell^\infty} (1 + 2\Delta t + 2\tilde{C}\Delta t)^m + 2m\Delta t \|\tilde{F} - F\|_{\ell^\infty} \end{aligned}$$

□

Konvergenz folgt nun aus Konsistenz und Stabilität wie zuvor.

Beispiel nichtlineare pDgl.

$u_t = \Delta u + 2u(1 - u^2)$ ist Gradientenfluss zu $E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + (u^2 - 1)^2 dx$
 $\Rightarrow u = 1$ (weiß) oder -1 (schwarz) werden auf lange Sicht angenommen



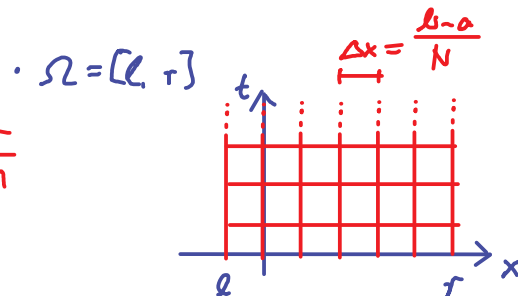
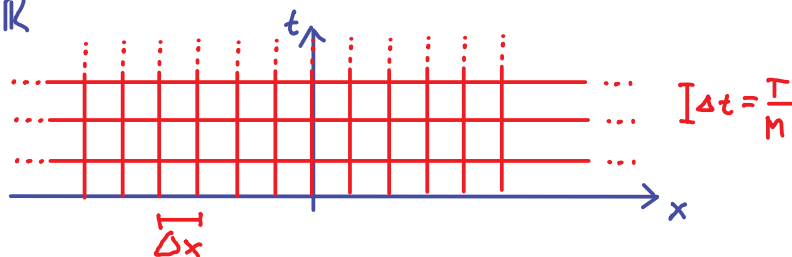
Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Upwind-Methode

$$u_t + a(t, x)u_x + c(t, x)u = f(t, x) \quad \text{auf } [0, T] \times \Omega, \quad a \geq 0$$

$$AB: u(t=0, x) = u_0(x), \quad RB: u(t, l) = u_e(t)$$

Gitter: $\cdot \Omega = \mathbb{R}$



Upwind-Verfahren:
$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + A_j^m \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} + C_j^m u_j^m = F_j^m$$

$$\Leftrightarrow u_j^{m+1} = u_j^m - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_j^m (u_j^m - u_{j-1}^m) - \Delta t C_j^m u_j^m + \Delta t F_j^m$$

$$AB: u_j^0 = u(t=0, x_j) \quad ; \quad RB: u_0^m = u(t^m, l)$$

Falls $a \leq 0$ wähle:
$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + A_j^m \frac{u_{j+1}^m - u_j^m}{\Delta x} + C_j^m u_j^m = F_j^m$$

$$AB: u_j^0 = u(t=0, x_j) \quad ; \quad RB: u_N^m = u(t^m, r)$$

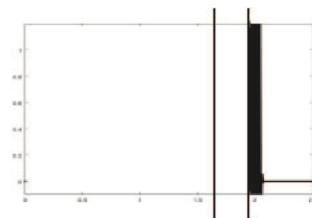
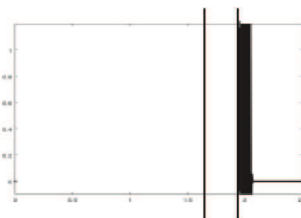
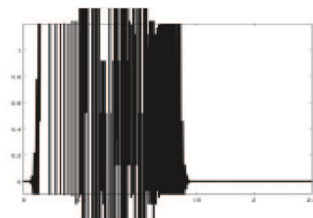
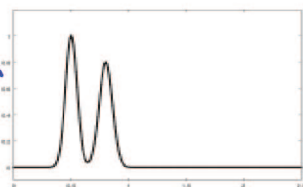
Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Beispielrechnung

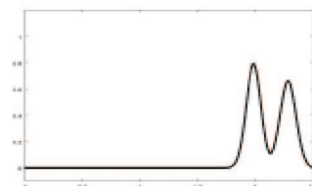
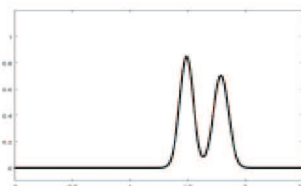
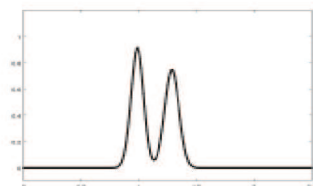
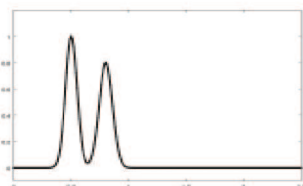
$$u_t + u_x = 0, \quad u(0, x) = e^{-200(x-\frac{1}{2})^2} + 0.8 e^{-150(x-0.8)^2} =: u_0(x)$$

$$\Rightarrow u(t, x) = u_0(x-t)$$

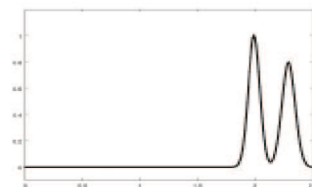
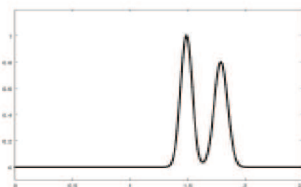
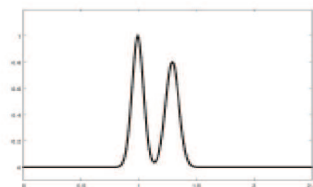
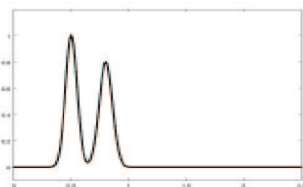
Vorwärts-
Differenzen



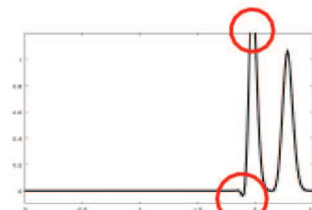
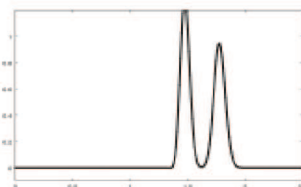
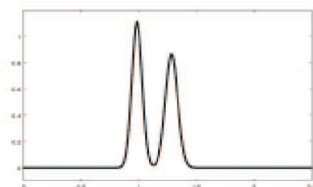
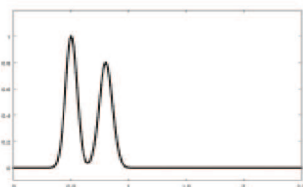
$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.9$



$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$



$\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1.1$



Lebesgue-Räume

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty]$. $\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & p \neq \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \tilde{p} = f \text{ f.ü. } \sup_{x \in \Omega} |\tilde{f}(x)|, p = \infty \end{cases}$

$L^p(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_{L^p} < \infty\}$

Thm. (Hölder-Ungleichung) Für $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Bew.: Für $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$a^\lambda b^{(1-\lambda)} \leq \lambda a + (1-\lambda)b \quad (\text{geometrischer} \leq \text{arithmetischer Durchschnitt}),$$

denn $f(t) = t^\lambda - \lambda t + \lambda - 1$ erfüllt $f(t) \leq f(1) = 0 \Rightarrow t^\lambda \leq \lambda t + 1 - \lambda$; nun wähle $t = \frac{a}{b}$

• wähle $a = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \right)^p$, $b = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \right)^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $1-\lambda = \frac{1}{q}$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \right)^q; \text{ nun integriere über } \Omega. \quad \square$$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Lp-Stabilität

$$u_t + a(t, x)u_x + c(t, x)u = f(t, x) \quad \text{auf } [0, T] \times \Omega, \quad p \in [1, \infty)$$

Thm: Sei $u_0(x), f(x) = 0$ für $|x|$ groß genug, $\Omega = \mathbb{R}$, Lsg. $u \geq 0$ gilt, dann ist

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^p} &\leq \|u_0\|_{L^p} \exp\left(\int_0^t \|c(s, \cdot)\|_{L^\infty} + \|a_x(s, \cdot)\|_{L^\infty} ds\right) \\ &\quad + \int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_{L^p} \exp\left(\int_\tau^t \|c(s, \cdot)\|_{L^\infty} + \|a_x(s, \cdot)\|_{L^\infty} ds\right) d\tau \end{aligned}$$

$$\text{Bew: } p \|u\|_{L^p}^{p-1} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^p} = \frac{d}{dt} \|u\|_{L^p}^p = p \int_{\Omega} u^{p-1} (f - a u_x - c u) dx$$

$$\leq p \left[\|u\|_{L^p}^p \|c\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} - \underbrace{\int_{\Omega} a (u^p)_x dx}_{= - \int_{\Omega} a_x u^p dx} \right] \leq p \left[\|u\|_{L^p}^p \|c\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|a_x\|_{L^\infty} \|u\|_{L^p}^p \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|u\|_{L^p} \leq (\|c\|_{L^\infty} + \|a_x\|_{L^\infty}) \|u\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}; \text{ nun nutze Gronwall} \quad \square$$

Thm: Für a, c konstant, $\Omega = \mathbb{R}$, ist $u(t, x) = e^{-ct} u_0(x - at) + \int_0^t e^{-c(t-s)} f(s, x - a(t-s)) ds$

$$\Rightarrow \|u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq e^{-ct} \|u_0\|_{L^p} + \int_0^t e^{-c(t-s)} \|f(s, \cdot)\|_{L^p} ds \quad \forall p \in [1, \infty]$$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

l2-Stabilität

$$u + a u_x + c u = f, \quad a, c \text{ konstant}, a \geq 0, \Omega = \mathbb{R}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + c u_j^n = F_j^n$$

Thm: (l^2 -Stabilität) Sei U_j^n die Lsg. des Upwind-Verfahrens, $\mu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Es ist

$$\|U^n\|_{l^2} \leq \begin{cases} e^{-c t^n} \|U^0\|_{l^2} + \Delta t \sum_{n=0}^{n-1} \|F^n\|_{l^2} e^{-c(t^n - t^n)} & \text{falls } \mu \leq 1 - c \Delta t \text{ „} l^2\text{-stabil“} \\ e^{(c+2\mu)t^n} \|U^0\|_{l^2} + \Delta t \sum_{n=0}^{n-1} \|F^n\|_{l^2} e^{(c+2\mu)(t^n - t^n)} & \text{falls } \mu \leq 1 + \underbrace{k \Delta t}_0 \text{ „} l^2\text{-von Neumann-stabil“} \end{cases}$$

Bew.: Setze $U_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{U}^n(k) e^{ikj\Delta x} dk$

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}^{n+1}(k) - \hat{U}^n(k)}{\Delta t} + a \frac{\hat{U}^n(k) - e^{-ik\Delta x} \hat{U}^n(k)}{\Delta x} + c \hat{U}^n(k) = \hat{F}^n(k) \quad \forall k \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$$

$$\Rightarrow \hat{U}^{n+1}(k) = (1 - \mu(1 - e^{-ik\Delta x}) - c\Delta t) \hat{U}^n(k) + \Delta t \hat{F}^n(k) =: \lambda(k) \hat{U}^n(k) + \Delta t \hat{F}^n(k)$$

Sei $\Lambda = \max_k |\lambda(k)| \Rightarrow \|U^{n+1}\|_{l^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{U}^{n+1}\|_{L^2} \leq \Lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{U}^n\|_{L^2} + \Delta t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{F}^n\|_{L^2}$

für $a < 0$ wäre dies $\approx 1 + c\mu$!! $= \Lambda \|U^n\|_{l^2} + \Delta t \|F^n\|_{l^2} \leq \Lambda^{n+1} \|U^0\|_{l^2} + \sum_{n=0}^m \Delta t \Lambda^{m-n} \|F^n\|_{l^2}$

$|\lambda(k)|^2 = (1 - c\Delta t)^2 + 4\mu \left(\sin^2 \frac{k\Delta x}{2}\right) (\mu - (1 - c\Delta t)) \Rightarrow \Lambda \leq \begin{cases} 1 - c\Delta t & \leq e^{-c\Delta t} \text{ falls } \mu \leq 1 - c\Delta t \\ 1 + (c+2\mu)\Delta t & \leq e^{(c+2\mu)\Delta t} \text{ falls } \mu \leq 1 + k\Delta t \end{cases}$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

l^∞ -Stabilität

$$u + a u_x + c u = f, \quad a \geq 0, \quad \Omega = \mathbb{R}$$

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + A_j^m \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} + C_j^m u_j^m = F_j^m$$

Thm: (l^∞ -Stabilität) Sei U_j^m Lsg. des Upwind-Verfahrens, $m \geq 0, j \in \mathbb{Z}, \mu = \|A\|_{l^\infty} \frac{\Delta t}{\Delta x}$.
Falls $\mu \leq 1$, $\|u^m\|_{l^\infty} \leq e^{t^m \|C\|_{l^\infty}} \|u^0\|_{l^\infty} + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} e^{(t^{m-1} - t^k) \|C\|_{l^\infty}} \|F^k\|_{l^\infty}$.

Bew: $U_j^{m+1} = U_j^m (1 - A_j^m \frac{\Delta t}{\Delta x}) + A_j^m \frac{\Delta t}{\Delta x} U_{j-1}^m - \Delta t C_j^m U_j^m + \Delta t F_j^m$
 $\Rightarrow |u_j^{m+1}| \leq \|u^m\|_{l^\infty} (1 - A_j^m \frac{\Delta t}{\Delta x}) + A_j^m \frac{\Delta t}{\Delta x} \|u^m\|_{l^\infty} + \Delta t \|C\|_{l^\infty} \|u^m\|_{l^\infty} + \Delta t \|F^m\|_{l^\infty}$
 $\Rightarrow \|u^{m+1}\|_{l^\infty} \leq (1 + \|C\|_{l^\infty} \Delta t) \|u^m\|_{l^\infty} + \Delta t \|F^m\|_{l^\infty}$
 $\Rightarrow$ nun Induktion in m □

Thm: Für $C = \text{konstant}$ & $\mu + C \Delta t \leq 1$ gilt sogar $\|u^m\|_{l^\infty} \leq e^{-c t^m} \|u^0\|_{l^\infty} + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} e^{-c(t^{m-1} - t^k)} \|F^k\|_{l^\infty}$

Bew: HA □

Wie sieht es mit $\Omega = [l, r]$ und Dirichlet-RB in l aus?

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Domain of Dependence

$$u_t(t, x) + a(t, x) u_x(t, x) + c(t, x) u(t, x) = f(t, x)$$

Def: Die durch $\frac{d}{dt} X(x, s; t) = a(t, X(x, s; t))$, $X(x, s; s) = x$ definierte Kurve heißt charakteristische Kurve zur pDgl.

Bsp: $u_t + t u_x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} X(x, s; t) = t \Rightarrow X(x, s; t) = x + \frac{t^2 - s^2}{2}$



Es ist $\frac{d}{dt} u(t, X(x, s; t)) = u_t(t, X(x, s; t)) + u_x(t, X(x, s; t)) \frac{d}{dt} X(x, s; t) = -c(t, X(x, s; t)) u(t, X(x, s; t)) + f(t, X(x, s; t))$

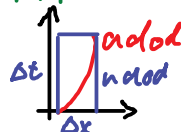
Mit $\tilde{g}(t) := g(t, X(x, s; t))$ ergibt sich $\tilde{u}' = -\tilde{c}\tilde{u} + \tilde{f} \Rightarrow$ entlang char. Kurven gilt gDgl.
 $\Rightarrow \tilde{u}(t) = \tilde{u}(s) e^{-\int_s^t \tilde{c}(\tau) d\tau} + \int_s^t \tilde{f}(\tau) e^{-\int_\tau^t \tilde{c}(\tau) d\tau} d\tau$ hängt nur von u entlang $(t, X(x, s; t))$ ab!

Bsp: $u_t + t u_x = 0 \Rightarrow u(t, x + \frac{t^2 - s^2}{2}) = u(s, x) \Rightarrow u(t, x) = u(0, x - \frac{t^2}{2})$

Def: Die analytische domain of dependence (dod) von (t, x) ist $\{X(x, s; t), t \mid 0 \leq t \leq s\}$.

Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung: analytische $\subset$ numerische dod

$$\Rightarrow a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$



Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Konvergenz (Konsistenz + Stabilität)

Def: u löse $u_t + a u_x + c u = f$. Der Abschneidefehler für das Upwind-Verfahren ist

$$\tau_j^m = \frac{u_j^{n+1} - u_j^m}{\Delta t} + a_j^m \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} + c_j^m u_j^m - f_j^m \quad (\text{mit } g_j^m = g(t^m, x_j))$$

Thm: (Konsistenz) Das Upwind-Verfahren ist konsistent erster Ordnung, d.h. für eine glatte Lösung u gilt $\tau_j^m = O(\Delta t + \Delta x)$.

Bew: HA (mittels Taylorentwicklung) $\square$

Wie bei der Wärmeleitung löst der Fehler $e_j^m = U_j^m - u_j^m$: $\frac{e_j^{n+1} - e_j^m}{\Delta t} + a_j^m \frac{e_j^m - e_{j-1}^m}{\Delta x} + c_j^m e_j^m = \tau_j^m$

Thm: (Konvergenz) U_j^m , $j \in \mathbb{Z}$, $m = 0, \dots, M = \frac{T}{\Delta t}$ löse das Upwind-Verfahren für $u_t + a u_x + c u = f$ auf $[0, T] \times \Omega$, $\Omega = \mathbb{R}$, $a \geq 0 + AB$, u glatt, $\mu \leq 1$. Dann gilt $\|e^m\|_2, \|e^m\|_\infty = O(\Delta t + \Delta x) \forall m$

Bew: Stabilität $\Rightarrow \|e^m\| \leq \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} e^{k \text{ konst} \cdot T} \|\tau^k\| \leq T e^{k \text{ konst} \cdot T} O(\Delta t + \Delta x)$. $\square$
nur an den Rand, wo char. Kurven rauslaufen!

Thm: Nun sei $\Omega = [l, r]$ & es gelten RB $u(t, l) = g(t)$. $\|e^m\|_{l, \infty} = O(\Delta t + \Delta x)$, $m = 1, \dots, M$.

Bew: HA (leite erst L^∞ -Stabilität für O-RB her) $\square$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

Verfahren höherer Konsistenzordnung

$$u_t + au_x = 0$$

Def.: Verfahren mit zentralen Differenzen
$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} + A_j^m \frac{U_{j+1}^m - U_{j-1}^m}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Friedrichs-Verfahren
$$\frac{U_j^{m+1} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^m + U_{j+1}^m)}{\Delta t} + A_j^m \frac{U_{j+1}^m - U_{j-1}^m}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Wendroff-Verfahren
$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} + a \frac{U_{j+1}^m - U_{j-1}^m}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \Delta t a^2 \frac{U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m}{\Delta x^2}$$

Vorzeichen von a
spielt keine Rolle
mehr!

für $a = \text{konst.}$

Wie kommt das Lax-Wendroff-Verf. zustande?

$$u_t = -au_x \Rightarrow u_{tt} = -a_t u_x - a u_{xt} = -a_t u_x - a(-au_x)_x$$

Taylorentwicklung
$$U_j^{m+1} = U_j^m + \Delta t \underbrace{[u_t]_j^m}_{= -[au_x]_j^m} + \frac{\Delta t^2}{2} \underbrace{[u_{tt}]_j^m}_{= [a_t u_x - a(au_x)_x]_j^m} + O(\Delta t^3)$$

$$\Rightarrow \frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\Delta t} + [(a + \frac{1}{2} \Delta t a_t) u_x]_j^m = \frac{1}{2} \Delta t [a(au_x)_x]_j^m + O(\Delta t^2)$$

Thm. (Konsistenz) Für eine glatte Lsg. u ist der Abschneidefehler der drei Verfahren $O(\Delta t + \Delta x^2)$ bzw. $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ für LW.

Bew: HA $\square$

I2-Stabilität

$$u_t + a u_x = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \text{ mit } a = \text{konst.}$$

Setzen wir $U_j^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{U}^m(k) e^{ikx_j} dk$ in die Verfahren ein, erhalten wir

zentr. Diff:
$$\frac{\hat{U}^{m+1}(k) - \hat{U}^m(k)}{\Delta t} + a \frac{e^{ik\Delta x} \hat{U}^m(k) - e^{-ik\Delta x} \hat{U}^m(k)}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Friedrichs:
$$\frac{\hat{U}^{m+1}(k) - \frac{1}{2}(e^{ik\Delta x} \hat{U}^m(k) + e^{-ik\Delta x} \hat{U}^m(k))}{\Delta t} + a \frac{e^{ik\Delta x} \hat{U}^m(k) - e^{-ik\Delta x} \hat{U}^m(k)}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Wendroff:
$$\frac{\hat{U}^{m+1}(k) - \hat{U}^m(k)}{\Delta t} + a \frac{e^{ik\Delta x} \hat{U}^m(k) - e^{-ik\Delta x} \hat{U}^m(k)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} a^2 \Delta t \frac{\hat{U}^m(k) (e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x})}{\Delta x^2}$$

$\Rightarrow \hat{U}^{m+1}(k) = \lambda(k) \hat{U}^m(k)$ für alle $k \in [-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}]$ mit

$$\lambda(k) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{2}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = 1 - \mu i \sin k\Delta x & , \text{ ZD} \\ \frac{1}{2}[e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - \mu(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})] = \cos k\Delta x - \mu i \sin k\Delta x & , \text{ LF} \\ 1 - \frac{a}{2}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) + \frac{a^2}{2}(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}) = 1 - \mu i \sin k\Delta x - 2\mu^2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} & , \text{ LW} \end{cases}$$

Thm: (ℓ^2 -Stabilität) LF & LW sind ℓ^2 -stabil für $|\mu| \leq 1$, ZD ist für kein μ ℓ^2 -stabil.

Bew: LF: $|\lambda(k)|^2 = \cos^2 k\Delta x + \mu^2 \sin^2 k\Delta x \leq 1$; LW: $|\lambda(k)|^2 = (1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2})^2 + \mu^2 \sin^2 k\Delta x = 1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} \leq 1$

ZD: $|\lambda(k)|^2 = 1 + \mu^2 \sin^2 k\Delta x > 1 \Rightarrow |\hat{U}^m(k)| \geq (1 + c)^{\frac{m}{2}} |\hat{U}^0(k)|$ für $\forall c \leq \mu^2 \sin^2(k\Delta x)$

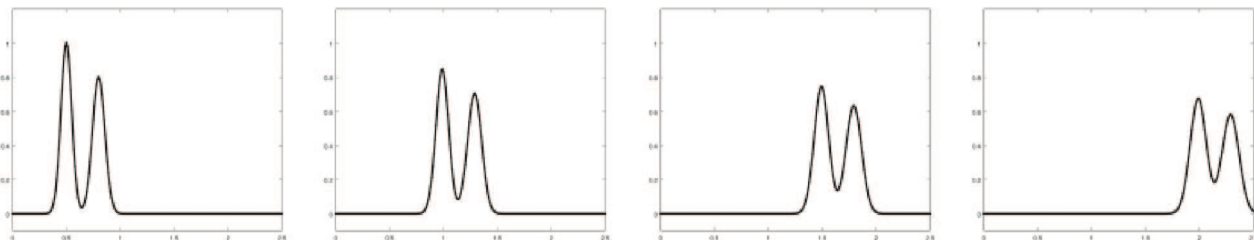
$\Rightarrow a \omega \Delta t \xrightarrow{\mu \text{ konst.}} 0$ folgt $\|\hat{U}^m\|_{\ell^2} = \|\hat{U}^m\|_{L^2} \geq \|\hat{U}^m\|_{[\frac{\pi}{2\Delta x}, \frac{3\pi}{2\Delta x}]} \geq (1 + \frac{c}{2})^{\frac{m}{2}} \|\hat{U}^0\|_{[\frac{\pi}{2\Delta x}, \frac{3\pi}{2\Delta x}]} \rightarrow \infty$

Finite Differenzen: Hyperbolische pDgl. (1D Transportgleichung)

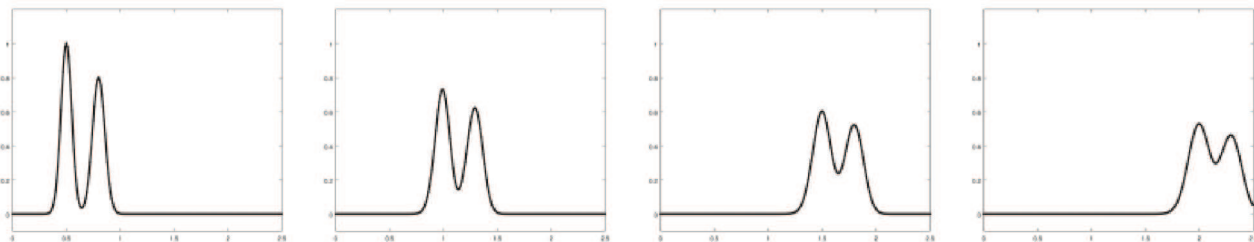
Beispielrechnung

$$u_t + u_x = 0 \quad , \quad \mu = \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.7$$

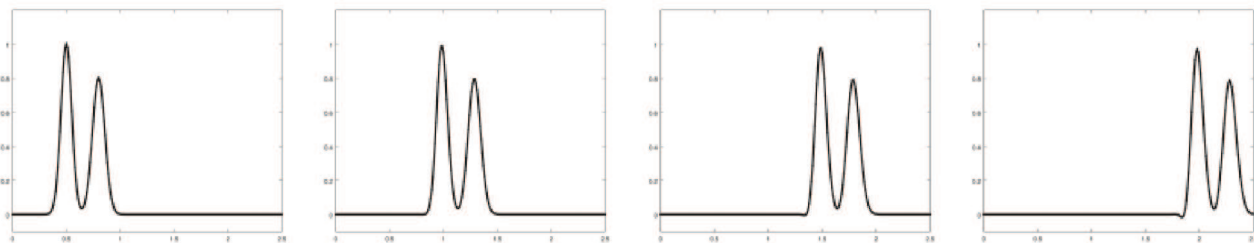
upwind



LF



LW



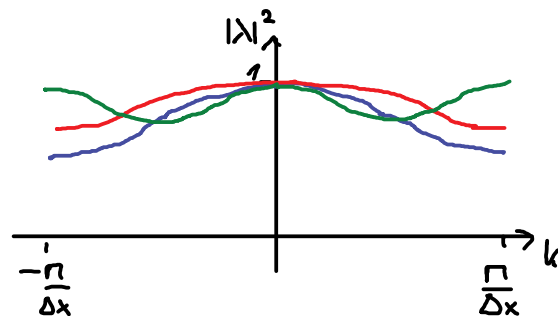
alle Verfahren sind konvergent in O^2 (folgt aus Stabilität + Konsistenz), aber...

Numerische Dissipation

$$u_t + u_x = 0 \quad \text{hat Lsg. } u(t, x) = u(0, x-t) \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{L^2} = \text{konst.}$$

$$\sqrt{2\pi} \|u^m\|_{L^2} = \|\hat{u}^m\|_{L^2} \quad \text{mit } |\hat{u}^m(k)| \leq |\lambda(k)|^m |\hat{u}^0(k)|$$

$$\text{für } |\lambda(k)|^2 = \begin{cases} 1 - 4\mu(1-\mu) \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} & \text{upwind} \\ 1 - (1-\mu^2) \sin^2 k\Delta x & \text{LF} \\ 1 - 4\mu^2(1-\mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} & \text{LW} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ Frequenzanteile zu $k=0$ bleiben erhalten wegen $|\lambda(0)| = 1$, aber

Frequenzanteile weiter weg von $k=0$ werden gedämpft $\Rightarrow$ „numerische Dissipation“

Def: Gilt für ein Verfahren $|\lambda(k)|^2 \leq 1 - \delta \left| \sin \frac{k\Delta x}{2} \right|^{2r}$ für ein $\delta > 0, r \in \mathbb{N}$,
heißt das Verfahren dissipativ von Ordnung r . (upwind & LF: $r=1$, LW: $r=2$)

Ausblick: 2D und Nichtlinearität

Erhaltungsprinzip: $u_t + \operatorname{div}[q(x,u)] = 0 \Rightarrow u_t + q_u \cdot u_x + q_x = 0, \Omega \subset \mathbb{R}^2$

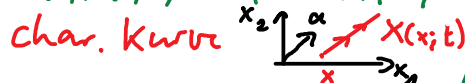
$\Rightarrow$ allgemeine Form: $u_t(t,x) + a(t,x,u(t,x)) \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x,u(t,x))$

Lsg. erfüllt $u(t, X(x;t)) = u(x;t)$

für charakteristische Gleichungen

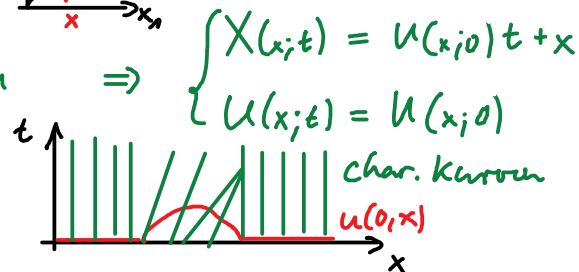
$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(x;t) = a(t, X(x;t), u(x;t)), \quad X(x;0) = x \\ \dot{u}(x;t) = f(t, X(x;t), u(x;t)), \quad u(x;0) = u_0(x) \end{array} \right.$
g Dgl., d.h. Konzept der Dgl. gilt auch hier

Bsp: $u_t + a \cdot \nabla u = 0, a \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow X(x;t) = at + x, u(t, X(x;t)) = u(x;t) = u(x,0), \text{ d.h. } u(t,y) = u(0, y-at)$



Bsp: (Burgers-Gleichung) $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \text{ d.h. } a(t,x,u) = u$

$\Rightarrow u$ ist konstant entlang char. Kurven



Das Upwind-Verfahren lautet nun

$$\frac{u_{ij}^{m,n} - u_{ij}^m}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[a(t^m, x_{ij}, u_{ij}^m) \cdot \left(\frac{u_{ij}^m - u_{i-1,j}^m}{u_{ij}^m - u_{i,j-1}^m} \right) + a(t^m, x_{ij}, u_{ij}^m) \cdot \left(\frac{u_{i+1,j}^m - u_{ij}^m}{u_{ij}^{m,n} - u_{ij}^m} \right) \right] = f(t^m, x_{ij}, u_{ij}^m)$$

+ AB + RB an dem Teil von $\partial\Omega$, von dem die char. Kurven starten.

Ist $|a(t,x,u) \cdot (\frac{\partial t}{\partial \tau} / \frac{\partial x}{\partial \tau})| \leq 1 \forall t,x,u$, folgt l^2 -/ l^∞ -Stabilität wie zuvor.

PDgl.-Theorie: Einführung

Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen:
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Dies hatten wir interpretiert als notwendige Bedingung dafür, dass u

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) u(x) dx \quad (*)$$

unter allen Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit 0-Randwerten minimiert. Im Detail:

Def: (Gâteaux-Ableitung) Sei X ein Vektorraum, $E: X \rightarrow \mathbb{R}$. Die Gâteaux-Ableitung von E in $u \in X$ in Richtung $v \in X$ ist $\partial_u E(u)(v) = \left. \frac{d}{dt} E(u + tv) \right|_{t=0}$.

Thm: (Notwendige Optimalitätsbedingung) Minimiert u das Funktional E und existiert $\partial_u E(u)(v)$, so ist $\partial_u E(u)(v) = 0$. warum?

Bsp: Für (*) ist $\partial_u E(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - f v \, dx$. Ist u ausreichend differenzierbar, folgt mit partieller Integration $\partial_u E(u)(v) = \int_{\Omega} v (-\Delta u - f) \, dx$. Ist u ein Minimum, gilt $\partial_u E(u)(v) = 0$ für „alle“ $v \Rightarrow -\Delta u - f = 0$.

Eigentlich gilt jedoch nur die sog. schwache Formulierung der pDgl.,
$$0 = \partial_u E(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - f v \, dx \quad \forall v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Wie sehr muss u differenzierbar sein, um $\Delta u = f$ auf diese Weise interpretieren zu können?

PDgl.-Theorie: Schwache Ableitung

Def: $C^m(\bar{\Omega})$ ist der Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

mit $\|f\|_{C^m} := \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq m} |D^\alpha f(x)| < \infty$

$C_0^\infty(\Omega)$ ist der Raum aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit Träger $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} \subset \Omega$ und kompakt.

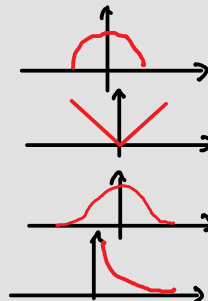
$L_{loc}^1(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^1(\omega) \forall \omega \subset \Omega \text{ kompakt}\} = \text{lokal integrierbare Funktionen}$

Bsp: $x \mapsto \sqrt{1-x^2} \in C^0([-1,1]) \setminus C^1([-1,1])$

$x \mapsto |x|^3 \in C^2([-1,1]) \setminus C^3([-1,1])$

$x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$x \mapsto \frac{1}{x} \in L_{loc}^1((0,\infty))$



Def: Sei $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, α ein Multiindex. $w \in L_{loc}^1$ heißt schwache α -Ableitung

von u , wenn $\int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Bsp: $u \in C^m(\bar{\Omega}), \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \varphi \partial_{x_i} u dx = - \int_{\Omega} u \partial_{x_i} \varphi dx \Rightarrow \partial_{x_i} u$ ist schwache Ableitung nach x_i ;

analog ist $D^\alpha u$ schwache α -Ableitung für $|\alpha| \leq m$

$x \mapsto |x|$ hat schwache Ableitung $x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \leftarrow \text{prüfen!}$

PDgl.-Theorie: Sobolev-Räume

- Def: · Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert
- Ein vollständiger normierter Raum X mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ heißt Hilbertraum, wenn $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X$
 - Sei $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$. Der (m, p) -Sobolev-Raum ist

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) \mid f \text{ hat schwache } \alpha\text{-Ableitung } D^\alpha f \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m \}$$
 mit Norm $\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$
 - Sei $m \in \mathbb{N}$. Der m -Hilbertraum ist $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
 mit Skalarprodukt $(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha g \, dx$.

Thm: $W^{m,p}(\Omega)$ ist vollständig.

Bsp: · $x \mapsto \frac{1}{x^2} \in W^{m,p}((1, \infty)) \quad \forall p \in [1, \infty], m \geq 0$

· $x \mapsto \sqrt{|x|} \in (W^{1,p}((-1, 1)) \cap L^q((-1, 1))) \setminus W^{2,r}((-1, 1)) \quad \forall p \in [1, 2), q, r \in [1, \infty]$

· $x \mapsto \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \notin W^{1,p}((-1, 1)) \quad \forall p$

Thm: (Spursatz) Ω habe Lipschitz-Rand. $T: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$, ist linear & beschränkt.

PDgl.-Theorie: Allgemeinere elliptische Probleme & Randbed.

Offenbar macht die Minimierung von $E(u) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} - \int_{\Omega} f u \, dx$ bereits auf $H^1(\Omega) \supset C^2(\bar{\Omega})$ Sinn.

Def: $u \in H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v=0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ heißt schwache Lösung von $-\Delta u = f$ in Ω , $u=0$ auf $\partial\Omega$, wenn gilt $0 = \partial_u E(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Um etwas allgemeinere elliptische pDgl. & RB zu erhalten, betrachten wir nun

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla u(x)^T A(x) \nabla u(x) + \frac{q(x)}{2} u(x)^2 - f(x) u(x) \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{p(x)}{2} u(x)^2 - g(x) u(x) \, dx$$

für $A(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ stetig differenzierbar & symmetrisch positiv definit, $q \in L^\infty(\Omega)$, $q \geq 0$,

$\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ mit positivem Maß, $p \in L^\infty(\Gamma_1)$, $p \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_1)$, zu minimieren für

$u \in H^1(\Omega)$ (warum macht dies Sinn?) mit $u=h \in L^2(\Gamma_2)$ auf $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$.

$\Rightarrow$ Für alle $v \in H^1(\Omega)$ mit $v|_{\Gamma_2} = 0$ gilt

$$0 = \partial_u E(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla v^T A \nabla u + q u v - f v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v - g v \, dx$$

„schwache Formulierung“

wenn u glatt $\Rightarrow \int_{\Omega} v [-\operatorname{div}(A \nabla u) + q u - f] \, dx + \int_{\Gamma_1} (u^T A \nabla u + p u - g) v \, dx$

$$\Rightarrow -\operatorname{div}(A \nabla u) + q u = f \quad \text{in } \Omega \quad \text{mit} \quad \begin{cases} u = h & \text{auf } \Gamma_2 \\ u^T A \nabla u = g & \text{auf } \Gamma_1 \cap \{v=0\} \\ u^T A \nabla u + p u = g & \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

Dirichlet-RB

Neumann-RB

Robin-RB

$\Rightarrow$ überall auf $\partial\Omega$ genau eine RB

PDgl.-Theorie: Schwache Lösung

Die schwache Formulierung der pDgl. erhält man aus der Energie E durch $0 = \partial_u E(u)(v)$ für alle erlaubten v ; aus der pDgl. selbst erhält man sie durch Multiplikation der pDgl. mit v & partielle Integration.

Bsp: $\Delta u = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega \Rightarrow$ erlaubte v sind $v \in H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow \int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} v f dx \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} v f dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ ist schwache Formulierung

Def: Die schwache Formulierung zu
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x) \nabla u(x)) + b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x) u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = h(x) & \text{auf } \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \\ (A(x) \nabla u(x)) \cdot n + p(x) u(x) = g(x) & \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

ist $0 = \int_{\Omega} \nabla v^T A \nabla u + v b \cdot \nabla u + c u v - f v dx + \int_{\Gamma_1} p u v - g v dx \quad \forall v \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_2} = 0\}$
& $u = h$ auf Γ_2

$u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung der pDgl., wenn es die schwache Formulierung erfüllt.

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissonsgleichung)

PDgl.-Theorie: zugehörige Bilinearform

Durch Setzen von $u(x) = \tilde{u}(x) + h(x) \quad \forall x \in \Omega$ kann man die RB $u|_{\Gamma_2} = h$ zurückführen auf $\tilde{u}|_{\Gamma_2} = 0$

Bsp: $\Delta u = 0$ in Ω , $u = h$ auf $\partial\Omega \Rightarrow$ Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ & $u|_{\partial\Omega} = h$

$\Rightarrow$ Finde $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v + \nabla h \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Daher betrachten wir nur Nullrandwerte. Sei daher u schwache Lösung, d.h.

$u \in H_{\Gamma_2}^1$ mit $0 = \int_{\Omega} \nabla v^T A \nabla u + v b \cdot \nabla u + q u v - f v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v - g v \, dx \quad \forall v \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$.

Setze $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v^T A \nabla u + v b \cdot \nabla u + q u v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v \, dx$ "zugehörige Bilinearform"
 $l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, dx$

a ist eine Bilinearform, d.h. linear in u & v ($a(u + \lambda \tilde{u}, v) = a(u, v) + \lambda a(\tilde{u}, v)$, analog in v)

l ist eine Linearform ($l(v + \lambda \tilde{v}) = l(v) + \lambda l(\tilde{v})$)

u ist schwache Lsg. der pDgl. $\Leftrightarrow u \in H_{\Gamma_2}^1$ & $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma_2}^1$

PDgl.-Theorie: Existenz, Eindeutigkeit, Äquivalenz zu Minimierung

Def: Sei X ein Hilbertraum, $a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, $l: X \rightarrow \mathbb{R}$ linear.

Wir benötigen folgende Bedingungen: $\exists c, C > 0$, sodass für alle $u, v \in X$ gilt

Koerzivität/Elliptizität: $a(v, v) \geq c \|v\|_X^2$

Beschränktheit: $|a(u, v)| \leq C \|u\|_X \|v\|_X$

Beschränktheit: $|l(v)| \leq C \|v\|_X$

Thm: (Lax-Milgram-Lemma) Sei X ein Hilbertraum, a eine koerzive, beschränkte Bilinearform, l linear und beschränkt. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in X$ zu $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X$

Thm: Sei zusätzlich a symmetrisch, d.h. $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X$. Dann ist

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X \quad \Leftrightarrow \quad u = \underset{\tilde{u} \in X}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} a(\tilde{u}, \tilde{u}) - l(\tilde{u})$$

Bew: „ $\Rightarrow$ “ Sei $v \in X \Rightarrow \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) - (\frac{1}{2} a(u, u) - l(u)) = \frac{1}{2} a(v-u, v-u) + a(v-u, u) - l(v-u)$
 $= \frac{1}{2} a(v-u, v-u) \geq \frac{c}{2} \|v-u\|_X^2$

„ $\Leftarrow$ “ Setze $E(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u)$, dann ist $0 = \partial_u E(u)(v) = a(u, v) - l(v) \quad \forall v \in X \quad \square$

PDgl.-Theorie: Schwache Lösung Poisson-Problem

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, Lipschitz

Thm: $a(v, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ ist eine koerzive, beschränkte Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$,
 $\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ mit $f \in L^2(\Omega)$ ist eine beschränkte Linearform auf $H_0^1(\Omega)$.

Kor: Es existiert eine eindeutige schwache Lösung u von $-\Delta u = f$ in Ω , $u=0$ auf $\partial\Omega$.

Bew (Thm):

- $| \ell(v) | \leq \int_{\Omega} | f v | \, dx \leq \| f \|_{L^2} \| v \|_{L^2} \leq \| f \|_{L^2} \sqrt{\| v \|_{L^2}^2 + \| \nabla v \|_{L^2}^2} = \| f \|_{L^2} \| v \|_{H^1}$
- $| a(u, v) | \leq \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} | \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v | \, dx \leq \sum_{i=1}^d \| \partial_{x_i} u \|_{L^2} \| \partial_{x_i} v \|_{L^2}$
 $\leq \left(\| u \|_{L^2}, \| \partial_{x_1} u \|_{L^2}, \dots, \| \partial_{x_d} u \|_{L^2} \right)^T \cdot \left(\| v \|_{L^2}, \| \partial_{x_1} v \|_{L^2}, \dots, \| \partial_{x_d} v \|_{L^2} \right)^T$
 $\leq \sqrt{\| u \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_1} u \|_{L^2}^2 + \dots + \| \partial_{x_d} u \|_{L^2}^2} \cdot \sqrt{\| v \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_1} v \|_{L^2}^2 + \dots + \| \partial_{x_d} v \|_{L^2}^2} = \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1}$
- $a(v, v) = \int_{\Omega} | \nabla v |^2 \, dx = \frac{1}{2} \| \nabla v \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| \nabla v \|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2} \| \nabla v \|_{L^2}^2 + c \| v \|_{L^2}^2 \geq \min(\frac{1}{2}, c) \| v \|_{H^1}^2$
 $= \| \partial_{x_1} v \|^2 + \dots + \| \partial_{x_d} v \|^2$ Poincaré-Friedrichs-Ungleichung!
- Bilinearität & Linearität klar (prüfe!) □

PDgl.-Theorie: Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

Thm: (Poincaré - (Friedrichs-)Ungleichung) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt & zsmhngd. hat Lipschitz-Rand.

$\Gamma \subset \partial\Omega$ sei einfach zsmhngd mit $|\Gamma| > 0$. Es existiert ein $C > 0$, sodass für alle $v \in H^1_\Gamma = \{v \in H^1(\Omega) \mid v=0 \text{ auf } \Gamma\}$ gilt $\|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}$.

Bew.: in 1D, oBdA $\Omega = [a, b]$, $v(a) = 0$:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2}^2 &= \int_a^b v(x)^2 dx = \int_a^b \left(\int_a^x v'(y) dy \right)^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |v'(y)| dy \right)^2 dx = (b-a) \left(\int_a^b |v'(x)| dx \right)^2 \\ &\leq (b-a) \left(\|1\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \right)^2 = (b-a)^2 \|v'\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

in 2D mit $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, $v(a, x_2) = 0$:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2}^2 &= \int_c^d \int_a^b v^2 dx = \int_c^d \|v(\cdot, x_2)\|_{L^2}^2 dx_2 \leq (b-a)^2 \int_c^d \|\partial_{x_1} v(\cdot, x_2)\|_{L^2}^2 dx_2 \\ &\leq (b-a)^2 \int_c^d \int_a^b (\partial_{x_1} v)^2 + (\partial_{x_2} v)^2 dx = (b-a)^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

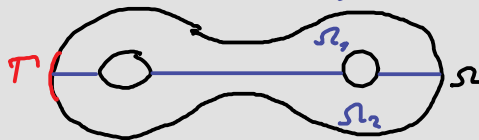
in 2D, Ω einfach zusammenhängend: $\exists \phi: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega$ Lipschitz

mit ϕ^{-1} Lipschitz, $\phi^{-1}(\Gamma) = \{a\} \times [c, d]$; L sei die Lipschitz-konstante von ϕ, ϕ^{-1} .

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega v^2 dx = \int_a^b \int_c^d (v \circ \phi)^2 |\det D\phi| dx \leq 2L^2 \|v \circ \phi\|_{L^2}^2 \leq 2L^2 (b-a)^2 \|\nabla(v \circ \phi)\|_{L^2}^2 = C \|\nabla \phi(\nabla v) \circ \phi\|_{L^2}^2 \\ &\leq C L^2 \|(\nabla v) \circ \phi\|_{L^2}^2 = C L^2 \int_a^b \int_c^d (\nabla v)^2 \phi dx = C L^2 \int_\Omega \nabla v^2 |\det D\phi^{-1}| dx \leq 2CL^4 \|\nabla v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

PDgl.-Theorie: Poincaré-Friedrichs-Ungleichung II

- analoger Beweis in d Dimensionen für einfach zsmhgd. Gebiet Ω mit Lipschitz-Rand, $v=0$ auf $T \subset \partial\Omega$ einfach zsmhgd mit $|T| > 0$.
- Für beliebiges Ω zsmhgd. mit Lipschitz-Rand $v=0$ auf $T \subset \partial\Omega$ zsmhgd mit $|T| > 0$ zerlege Ω in Lipschitzgebiete $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ mit $v=0$ auf Teil des Randes



$$\text{und nutze } \|v\|_{L^2}^2 = \|v|_{\Omega_1}\|_{L^2}^2 + \dots + \|v|_{\Omega_N}\|_{L^2}^2,$$

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla v|_{\Omega_1}\|_{L^2}^2 + \dots + \|\nabla v|_{\Omega_N}\|_{L^2}^2 \quad \square$$

Thm: Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gelten die nicht verbesserbaren Ungleichungen

$$1) \|v\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 \quad \text{falls } \Omega = [a, b]$$

$$2) \|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 \quad \text{falls } \Omega = [0, 1]^2$$

Bew: 1) HA: Finde v mit Gleichheit und beweise „ $\leq$ “ durch genauere Rechnung als oben

(prüfe für dieses v , welche Ungleichungen verbessert werden müssen!)

2) HA: mit semidiskreter Fourier-Transformation

$\square$

PDgl.-Theorie: Schwache Lösung allgemeine elliptische pDgl.

Thm: Sei Ω Lipschitz, $\Gamma_1, \Gamma_2 = \partial\Omega$ mit $|\Gamma_1|, |\Gamma_2| > 0$. $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})$ mit $\xi^T A \xi \geq c |\xi|^2 \forall \xi \in \mathbb{R}^d$

auch andere Bedingungen möglich,
siehe HA

$$\begin{aligned} & \cdot b \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d) \text{ mit } |b(x)| \leq c q(x) \quad \forall x \in \Omega \\ & \cdot q \in L^\infty(\Omega) \text{ mit } q \geq 0 \\ & \cdot p \in L^0(\Gamma_1) \text{ mit } p \geq 0 \\ & \cdot f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_1) \end{aligned}$$

Dann ist $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v^T A \nabla u + v b \cdot \nabla u + q u v \, dx + \int_{\Gamma_1} p u v \, dx$ lineare beschränkte Bilinearform auf $H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$ und $l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, dx$ beschränkt & linear.

Kor: $\exists!$ schwache Lösung von
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x) \nabla u(x)) + b(x) \cdot \nabla u(x) + q(x) u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{auf } \Gamma_2 \\ (A(x) \nabla u(x)) \cdot n + p(x) u(x) = g(x) & \text{auf } \Gamma_1 \end{cases}$$

Bew (Thm): $|l(v)| \leq \int_{\Omega} |f v| \, dx + \int_{\Gamma_1} |g v| \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq (\|f\|_{L^2} + C \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}) \|v\|_{H^1}$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|A\|_{L^\infty} \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} + \|b\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} + \|q\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|p\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq \text{konst.} \cdot \|v\|_{H^1} \|u\|_{H^1} \end{aligned}$$

$$a(v, v) \geq \int_{\Omega} c |v|^2 - |b| |v \nabla v| + q v^2 \geq \int_{\Omega} (c - \varepsilon) |\nabla v|^2 + \tilde{c} \left(|\nabla v| - \frac{|b|}{2\varepsilon} |v| \right)^2 dx \geq (c - \varepsilon) \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \text{konst.} \|v\|_{H^1}^2 \quad \square$$

Ritz-Galerkin-Verfahren: Existenz, Eindeutigkeit, Minimierung

Thm: Sei $a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine koerzive beschränkte Bilinearform auf dem Hilbertraum X , $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ linear und beschränkt. Sei $X_h \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u_h \in X_h$ von $a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$.

Def: u_h heißt Ritz-Galerkin-Approximation an die Lösung $u \in X$ von $a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in X$.

Bew: a ist koerzive beschränkte Bilinearform auf X_h , ℓ ist beschränkte Linearform auf X_h (prüfen!)
 $\Rightarrow$ Lax-Milgram liefert eindeutiges u_h . □

Thm: Ist a zusätzlich symmetrisch, so ist $u_h = \arg \min_{u \in X_h} \frac{a(u, u)}{2} - \ell(u)$.

Bew: analog zu Beweis in X . □

Die Ritz-Galerkin-Approximation u_h besitzt also die gleichen Eigenschaften wie u !

Ist $\dim X_h < \infty$, existiert eine Basis $\phi_1, \dots, \phi_N \in X_h$. Jedes $u_h \in X_h$ lässt sich schreiben als $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i$.

$$\Rightarrow a(u_h, v_h) = (U_1, \dots, U_N) A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad \ell(v_h) = (B_1, \dots, B_N) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

mit $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, $B_i = \ell(\phi_i)$

$$\Rightarrow \text{Ritz-Galerkin-Approximation löst } A^T \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}$$

Ritz-Galerkin-Verfahren: Fehlerschätzung

$a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a(v,v) \geq c \|v\|_X^2$ & $|a(u,v)| \leq C \|u\|_X \|v\|_X$, $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|\ell(v)| \leq \bar{C} \|v\|_X$

$X_h \subset X$, $a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in X$, $a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$

Thm: (Galerkin-Orthogonalität) $a(u_h - u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in X_h$

Bew: Subtrahiere $a(u, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$ von $a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$ $\square$

Def: Ist a symmetrisch, so ist $\langle u, v \rangle_a = a(u, v)$ ein Skalarprodukt auf X , das Energieskalarprodukt. $\|u\|_a = \sqrt{\langle u, u \rangle_a}$ heißt Energienorm.

Galerkin-Orthogonalität besagt, dass der Approximationsfehler $u_h - u$ orthogonal zu X_h bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ ist.

Kor: (Céa-Lemma) $\|u_h - u\|_X \leq \frac{C}{c} \min_{v_h \in X_h} \|v_h - u\|_X$ „Fast-Bestapproximation“

• (Bestapproximation) Ist a symmetrisch, gilt $\|u_h - u\|_a \leq \min_{v_h \in X_h} \|v_h - u\|_a$

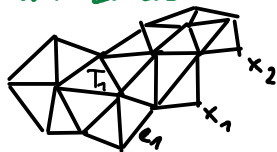
Bew: $c \|u_h - u\|_X^2 \leq a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h - u, v_h - u) \leq C \|u_h - u\|_X \|v_h - u\|_X \quad \forall v_h \in X_h$

• a symmetrisch $\Rightarrow \|u_h - u\|_a^2 = a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h - u, v_h - u) \leq \|u_h - u\|_a \|v_h - u\|_a \quad \forall v_h \in X_h$ $\square$
Galerkin-Orth.
Cauchy-Schwarz

u_h ist (fast) die bestmögliche Approximation an u . Man muss nur noch $\min_{v_h \in X_h} \|v_h - u\|_X$ abschätzen.

Lineare FE: Ansatz

Def.: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Eine Triangulierung von Ω ist ein Tripel (V, E, T) mit Knotenmenge $V = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^2)^N$, Kantenmenge $E = (e_1, \dots, e_L)$, Dreiecksmenge $T = (T_1, \dots, T_M)$, wobei jede Kante bzw. jedes Dreieck die konvexe Hülle zweier bzw. dreier Knoten ist, jeder Schnitt zweier Dreiecke entweder eine Kante oder leer ist, $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M T_i$, jede Kante der Schnitt zweier Dreiecke ist und $T_i \cap T_j \neq \emptyset \quad \forall i, j$.



$$h_T = \text{diam } T, \quad h = \max_{T \in T} h_T = \text{Gitterweite}$$

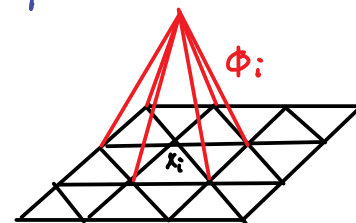
Wählt man $X_h \subset H^1(\Omega)$ als die Menge stückweise affiner Funktionen, $X_h = \{v: C(\Omega) \mid v|_T \in P_1 \quad \forall T \in T\}$

($P_1 = \{\text{Polynome von Grad} \leq 1\}$), ist eine Basis gegeben durch die „FE-Hütchenfunktionen“

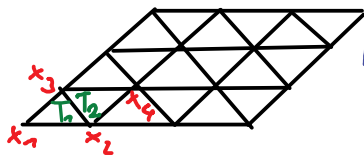
$\Phi_1, \dots, \Phi_N \in X_h$, die definiert sind durch $\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Die Elemente der gewählten Basis werden auch FE-Formfunktionen

genannt. Da bei FE $\text{supp } \Phi_i \cap \text{supp } \Phi_j = \emptyset$, ist $A_{ij} = a(\Phi_i, \Phi_j)$ dünn besetzt.



Lineare FE: Matrixassemblierung



$$\text{Knotenarray} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & 0.5 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{Konnektivitätsarray} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 7 & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow T_1 \\ \\ \\ \leftarrow T_i \end{matrix}$$

Die Berechnung der Matrix $A = (a(\phi_i, \phi_j))_{ij}$ nennt sich Assemblierung.

Da a von der Form $a(u, v) = \int_{\Omega} Q(u, v) dx = \sum_{\ell=1}^M \int_{T_{\ell}} Q(u, v) dx$ für einen bilinear Operator Q ist, wird hierzu über die Dreiecke iteriert. *hier ohne $\partial\Omega$ -Anteil; das geht analog...*

Sei $T_{\ell} = \text{co}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ dann sind auf T_{ℓ} nur $\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \phi_{i_3}$ ungleich 0

$$\Rightarrow \int_{T_{\ell}} Q(\phi_m, \phi_n) dx = 0 \text{ für } m \notin \{i_1, i_2, i_3\} \text{ oder } n \notin \{i_1, i_2, i_3\}$$

$\Rightarrow$ man berechnet die lokale Systemmatrix $A^{\ell} = \left(\int_{T_{\ell}} Q(\phi_{i_n}, \phi_{i_n}) dx \right)_{m,n=1,2,3}$ und addiert sie in A in Position (i_m, i_n) , $m, n=1,2,3$, d.h. man rechnet

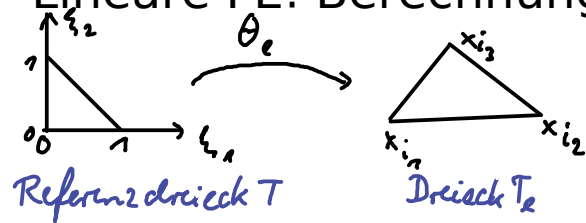
$$A = \sum_{\ell=1}^M L_{\ell}^T A^{\ell} L_{\ell} \text{ für } L_{\ell} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $i_1 \quad \quad i_2 \quad \quad i_3$

Bsp: $A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \times & \dots & \times & \dots \\ \dots & \times & \dots & \times & \dots \\ \dots & \times & \dots & \times & \dots \\ \dots & \times & \dots & \times & \dots \end{bmatrix}$

$$A^{\ell} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

Lineare FE: Berechnung lokale Systemmatrix



$$\Theta_e(\xi) = x_{i_1} + \overbrace{(x_{i_2} - x_{i_1} \mid x_{i_3} - x_{i_1})}^{D\Theta_e} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{bildet } T \text{ auf } T_e \text{ ab}$$

$$\text{Drieccksfläche} = |T_e| = |(x_{i_2} - x_{i_1}) \times (x_{i_3} - x_{i_1})|/2 = \det D\Theta_e/2$$

Setze $\Psi_1(\xi) = 1 - \xi_1 - \xi_2$, $\Psi_2(\xi) = \xi_1$, $\Psi_3 = \xi_2 \Rightarrow$ auf T_e ist $\phi_{i_m} \circ \Theta_e = \Psi_m$, $\nabla \phi_{i_m} \circ \Theta_e = D\Theta_e^{-T} \nabla \Psi_m$

Nun kann A^e mit Hilfe der Ψ_i und Θ_e berechnet werden!

Bsp: $a(u, v) = \int_{\Omega} u v dx \Rightarrow A_{mn}^e = \int_{T_e} \phi_{i_m} \phi_{i_n} dx = \int_T \Psi_m \Psi_n |\det D\Theta_e| d\xi = 2 |T_e| \int_T \Psi_m \Psi_n d\xi$

$$\Rightarrow A^e = \frac{|T_e|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \Rightarrow A_{mn}^e = \int_{T_e} \nabla \phi_{i_m} \cdot \nabla \phi_{i_n} dx = \int_T \nabla \Psi_m^T D\Theta_e^{-T} D\Theta_e^{-T} \nabla \Psi_n |\det D\Theta_e| d\xi$$

$$= |T_e| \nabla \Psi_m^T D\Theta_e^{-T} D\Theta_e^{-T} \nabla \Psi_n$$

$$D\Theta_e^{-T} = \frac{1}{2|T_e|} \begin{pmatrix} (x_{i_3} - x_{i_1})_2 & -(x_{i_3} - x_{i_1})_1 \\ -(x_{i_2} - x_{i_1})_2 & (x_{i_2} - x_{i_1})_1 \end{pmatrix} \Rightarrow D\Theta_e^{-T} D\Theta_e^{-T} = \frac{1}{4|T_e|^2} \underbrace{\begin{pmatrix} |x_{i_3} - x_{i_1}|^2 & -(x_{i_3} - x_{i_1}) \cdot (x_{i_2} - x_{i_1}) \\ -(x_{i_3} - x_{i_1}) \cdot (x_{i_2} - x_{i_1}) & |x_{i_2} - x_{i_1}|^2 \end{pmatrix}}_R$$

$$\Rightarrow A^e = \frac{1}{4|T_e|} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4|T_e|} \begin{pmatrix} -x_{i_2} - x_{i_3} & x_{i_2} - x_{i_3} & x_{i_3} - x_{i_1} \\ -x_{i_3} - x_{i_1} & x_{i_3} - x_{i_1} & x_{i_1} - x_{i_2} \\ -x_{i_1} - x_{i_2} & x_{i_1} - x_{i_2} & x_{i_2} - x_{i_1} \end{pmatrix}$$

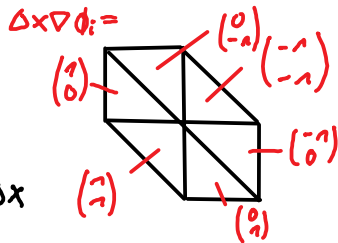
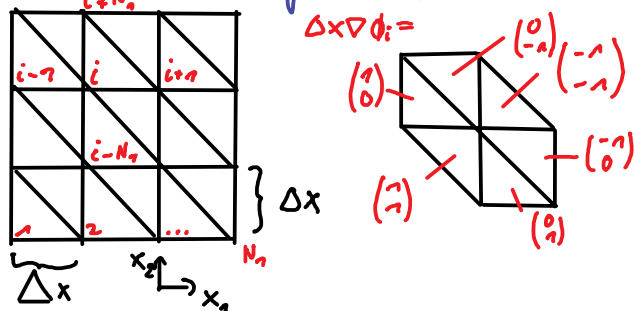
Lineare FE: Masse- & Steifigkeitsmatrix für reguläres Gitter

Def: Sei $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ eine Basis des FE-Raums X_h .

Massenmatrix $M_h = \left(\int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j dx \right)_{ij}$, Steifigkeitsmatrix $L_h = \left(\int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j dx \right)_{ij}$

Assemblierung von $B_i = \ell(\Phi_i)$ funktioniert ebenfalls mittels Iteration über die Dreiecke (HA); ist $\ell(v) = \int_{\Omega} f v dx$ für $f \in X_h$ kann man auch $B = M_h \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$ rechnen

Auf einem regelmäßigen Gitter können wir die Systemmatrix auch direkt ausrechnen:



Bsp: $\int_{\Omega} |\nabla \Phi_i|^2 dx = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}^2 \right] = 4$

$\int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_{i+1} dx = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -1$

$\int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_{i-1} dx = \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_{i+N_1} dx = \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_{i-N_1} dx = -1$

$\Rightarrow L_h = \begin{pmatrix} \dots & -1 & \dots & -4 & \dots & -1 & \dots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L_h \begin{pmatrix} u_{i-N_1} \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+N_1} \end{pmatrix} = -u_{i-N_1} - u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} - u_{i+N_1}$

Finite Differenzen für Δ : $\frac{-u_{i-N_1} - u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} - u_{i+N_1}}{\Delta x^2}$

Bsp: $\int_{\Omega} \Phi_i^2 dx = \frac{\Delta x^2}{4}$, $\int_{\Omega} \Phi_i \Phi_{i \pm 1} dx = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_{i \pm N_1} dx = \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_{i \pm (N_1-1)} dx = \frac{\Delta x^2}{8}$ (HA) $\Rightarrow M_h = \frac{\Delta x^2}{8} \begin{pmatrix} \dots & 1 & 1 & \dots & 2 & \dots & 1 & 1 & \dots \end{pmatrix}$

Lineare FE: Interpolation und A priori Fehlerabschätzung

$a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a(v,v) \geq c \|v\|_X^2$ & $|a(u,v)| \leq C \|u\|_X \|v\|_X$, $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|\ell(w)| \leq \tilde{C} \|w\|_X$

$X_h \subset X = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \ell(w) \quad \forall v \in X$, $a(u_h, v_h) = \ell(w) \quad \forall v_h \in X_h$

Wir wissen bereits $\|u - u_h\|_{H^1}^2 \leq C \min_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1}^2$ wie groß ist dies?

Def: $I_h u = \sum_{i=1}^N u(x_i) \Phi_i \in X_h$ heißt FE-Interpolante von u

Def: Eine Triangulierung $(V, \mathcal{T}, J)$ nennen wir $\frac{1}{\rho}$ -quasiuniform, wenn für alle $T \in \mathcal{T}$ die affine Transformation $\theta_T: T \rightarrow T$ des Referenzdreiecks T auf T erfüllt $\text{cond } D\theta_T \leq \rho$.
Konditionszahl z.B. bzgl. 2-Norm

Thm: Auf einer $\frac{1}{\rho}$ -quasiuniformen Triangulierung mit Gitterweite h existiert $\hat{C} > 0$, nur abhängig von ρ , mit $\|u - I_h u\|_{L^2} \leq \hat{C} h^2 |u|_{H^2} = \hat{C} h^2 \|D^2 u\|_{L^2}$, $\|Du - DI_h u\|_{L^2} \leq \hat{C} h |u|_{H^2}$.

Kor: $\|u - u_h\|_{H^1}^2 \leq C \|u - I_h u\|_{H^1}^2 \leq C \hat{C}^2 h^2 (1 + h^2) |u|_{H^2}^2 \leq \tilde{C} h^2 |u|_{H^2}^2$

Vor dem Beweis liefern wir noch eine geometrische Interpretation von Quasiuniformität.

Thm: $r_T \geq 2h_T/\rho \quad \forall T \in \mathcal{T} \iff \frac{1}{\rho}$ -quasiuniform $\stackrel{2)}{\implies} r_T \geq h_T/8\rho \quad \forall T \in \mathcal{T}$



Bew: Sei θ die Referenztransformation. Inkreis $r_T = \frac{2|T|}{a+b+c}$, $2|T| = |\det D\theta| = b_1 b_2$, $\|D\theta\|_2 = b_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \stackrel{1)}{\geq} \frac{h_T}{2}$, $b_1 \leq a+b+c \leq b_1+b_1+\sqrt{2}b_1 \leq 4b_1$, 1) $\frac{\|D\theta\|_2}{\rho} \leq \frac{2h_T}{\rho} \leq r_T \leq b_2 = \|D\theta^{-1}\|_2^{-1}$ 2) $r_T \geq \frac{b_2}{4} \geq \frac{b_1}{4\rho} \geq \frac{h_T}{8\rho} \quad \square$

Bew.: Sei $v \in H^1([0,1]^2)$ mit $\int_0^1 v(s,0) ds = 0$.

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left(v(x_1, x_2) - \int_0^1 v(s,0) ds \right)^2 dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_0^1 v(x_1, x_2) - v(s, x_2) ds + \int_0^1 v(s, x_2) - v(s, 0) ds \right|^2 dx_1 dx_2 \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_0^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2) dt ds + \int_0^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2}(s, t) dt ds \right|^2 dx_1 dx_2 \\
 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt ds + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_2}(s, t) \right| dt ds \right)^2 dx_1 dx_2 \\
 &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2) \right| dt ds \right)^2 + \left(\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_2}(s, t) \right| dt ds \right)^2 dx_1 dx_2 \\
 &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2) \right|^2 dt ds dx_1 dx_2 + 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_2}(s, t) \right|^2 ds dt dx_1 dx_2 \\
 &= 2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2}^2 = 2 \|\nabla v\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

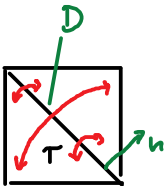
Analog für v mit $\int_0^1 v(0, s) ds = 0$.

Sei $v \in H^1(T)$, $\hat{v}: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{v} = v$ auf T , $\hat{v}(x_1, x_2) = v(1-x_2, 1-x_1)$ auf $[0,1]^2 \setminus T$

dann ist $\hat{v} \in H^1([0,1]^2)$ mit $\|\hat{v}\|_{L^2}^2 = 2\|v\|_{L^2}^2$ (klar), $\|\nabla \hat{v}\|_{L^2}^2 = 2\|\nabla v\|_{L^2}^2$ (denn $\nabla \hat{v} = \nabla v$ auf T

und $\nabla \hat{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla v(1-x_2, 1-x_1)$ auf $[0,1]^2 \setminus T$: Sei $\varphi \in C_0^\infty([0,1]^2; \mathbb{R}^2)$, dann ist

$$\int_0^1 \int_0^1 \hat{v} \operatorname{div} \varphi dx = \int_T v \operatorname{div} \varphi dx + \int_{T^c} \hat{v} \operatorname{div} \varphi dx = \int_D v \varphi \cdot n dx - \int_T \nabla v \cdot \varphi dx + \int_D \hat{v} \varphi \cdot (-n) dx - \int_{T^c} \nabla \hat{v} \cdot \varphi dx = - \int_0^1 \int_0^1 \nabla \hat{v} \cdot \varphi dx$$



- Sei $v \in H^1(T)$ mit $\int_0^1 v(s, 0) ds = 0$ oder $\int_0^1 v(0, s) ds = 0$, dann ist $\|v\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|\hat{v}\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla \hat{v}\|_{L^2}^2 = 2 \|\nabla v\|_{L^2}^2$
- $h_T/\sqrt{2} \leq \|D\theta_e\|_2 \leq \sqrt{2} h_T$, da mindestens eine Seite von T auf Länge h_T transformiert wird und jede Seite von T mindestens auf Länge $h_T/2$ transformiert wird

$$\|D\theta_e^{-1}\|_2 \leq \rho / \|D\theta_e\|_2 \leq \sqrt{2} \rho / h_T, \quad |T_e| = |\det D\theta_e|/2 = \|D\theta_e\|_2 / \|D\theta_e^{-1}\|_2 / 2$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla I_h u\|_{L^2}^2 &= \sum_{\ell=1}^M 2 |T_\ell| \int_T |D\theta_\ell^{-T} \nabla((u - I_h u) \circ \theta_\ell)|^2 dx \leq \sum_{\ell=1}^M 2 |T_\ell| \|D\theta_\ell^{-1}\|_2^2 \|\nabla((u - I_h u) \circ \theta_\ell)\|_{L^2}^2 \\ &\leq 2 \sum_{\ell=1}^M 2 |T_\ell| \|D\theta_\ell^{-1}\|_2^2 \|D^2((u - I_h u) \circ \theta_\ell)\|_{L^2}^2 = 2 \sum_{\ell=1}^M 2 |T_\ell| \|D\theta_\ell^{-1}\|_2^2 \|D\theta_\ell^T (D^2(u - I_h u)) \circ \theta_\ell D\theta_\ell\|_{L^2}^2 \\ \|A\|_{L^2}^2 &= \int \sum_{i,j} |A_{ij}|^2 dx \\ &\leq 2 \sum_{\ell=1}^M \|D\theta_\ell^{-1}\|_2^2 \|D\theta_\ell\|_F^4 2 |T_\ell| \int_T (D^2 u)^2 \circ \theta_\ell dx \leq \sum_{\ell=1}^M \rho^2 4 h_T^2 \int_T (D^2 u)^2 dx \leq 4 \rho^2 h^2 \|D^2 u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

- Sei $v \in H^2(T)$ mit $v(0, 0) = v(1, 0) = 0$.

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 \|v(x_1, \cdot)\|_{L^2}^2 dx_1 \leq 2 \int_0^1 v(x_1, 0)^2 + \|v(x_1, \cdot) - v(x_1, 0)\|_{L^2}^2 dx_1 \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} 2 \|v(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^1 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, \cdot) \right\|_{L^2}^2 dx_1 \\ &\leq 2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1}(\cdot, 0) \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L^2}^2 \leq 2 C \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{H^1}^2 + 2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq 2(C+1) \|\nabla v\|_{L^2}^2 + 2C \|D^2 v\|_{L^2}^2 \\ &\stackrel{\text{Poincaré von vorher}}{\leq} (6C+4) \|D^2 v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|_{L^2}^2 &= \sum_{\ell=1}^M \int_{T_\ell} (u - I_h u)^2 dx = \sum_{\ell=1}^M 2 |T_\ell| \int_T (u - I_h u)^2 \circ \theta_\ell dx \leq \tilde{C} \sum_{\ell=1}^M 2 |T_\ell| \int_T (D^2((u - I_h u) \circ \theta_\ell))^2 dx \\ &= \tilde{C} \sum_{\ell=1}^M 2 |T_\ell| \int_T \|D\theta_\ell^T (D^2 u) \circ \theta_\ell D\theta_\ell\|_F^2 dx \leq \tilde{C} \sum_{\ell=1}^M \|D\theta_\ell\|_F^4 2 |T_\ell| \int_T \|D^2 u\|_F^2 \circ \theta_\ell dx \\ &\leq 16 \tilde{C} h^4 \sum_{\ell=1}^M \int_{T_\ell} \|D^2 u\|_F^2 dx \leq 16 \tilde{C} h^4 \|D^2 u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

□

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissonsgleichung)

Lineare FE: Aubin-Nitsche Dualitätstrick

$a: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ koerziv, beschränkt, bilinear, $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, linear, $X_h \subset X$ Unterraum ^{H_0^1}
 $u \in X: a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in X, \quad u_h \in X_h: a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$

Wir wissen $\|u_h - u\|_{H^1} \leq Ch|u|_{H^1} \Rightarrow \|u_h - u\|_{L^2} \leq Ch|u|_{H^1}$; tatsächlich gilt jedoch oft $\|u_h - u\|_{L^2} \leq Ch^2|u|_{H^2}$ ⁽²⁾

Thm: (Aubin-Nitsche-Lemma) Sei H Hilbertraum mit stetiger Einbettung $X \hookrightarrow H, w \in X$,
mit $a(v, w) = (u_h - u, v)_H \quad \forall v \in X$. Es gibt $C > 0$ abhängig von a mit

adjungierte Bil.-form $\|u_h - u\|_H^2 \leq C \|u_h - u\|_X \inf_{w_h \in X_h} \|w - w_h\|_X$

Bew: $\|u_h - u\|_H^2 = (u_h - u, u_h - u)_H = a(u_h - u, w) = a(u_h - u, w - w_h) \leq C \|u_h - u\|_X \|w - w_h\|_X \quad \forall w_h \in X_h$
^{ist dies wohldefiniert?}

Kor: Sei $X = H_0^1(\Omega)$, und für a gelte, dass die Lösung w_r von $a(v, w_r) = (r, v)_{L^2} \quad \forall v \in L^2$
erfüllt: $|w_r|_{H^2} \leq c \|r\|_{L^2} \quad \forall r \in L^2(\Omega)$. Dann ist $\|u_h - u\|_{L^2} \leq \tilde{C} h^2 |u|_{H^2}$

Bew: Mit $H = L^2(\Omega)$ ist $\|u_h - u\|_{L^2}^2 \leq C \|u_h - u\|_{H^1} \inf_{w_h \in X_h} \|w - w_h\|_{H^1} \leq \hat{C} h |u|_{H^2} h |w|_{H^2} \leq \hat{C} h^2 |u|_{H^2} \|u_h - u\|_{L^2}$

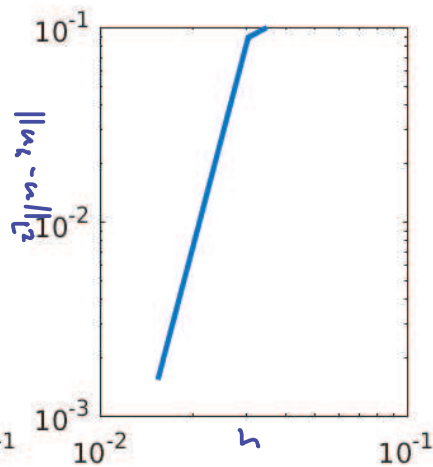
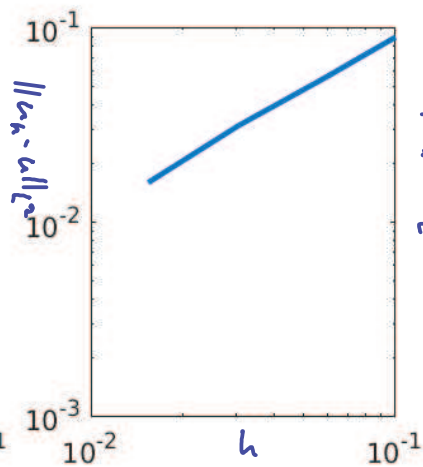
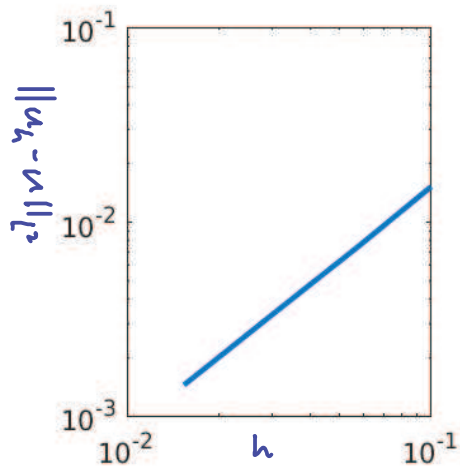
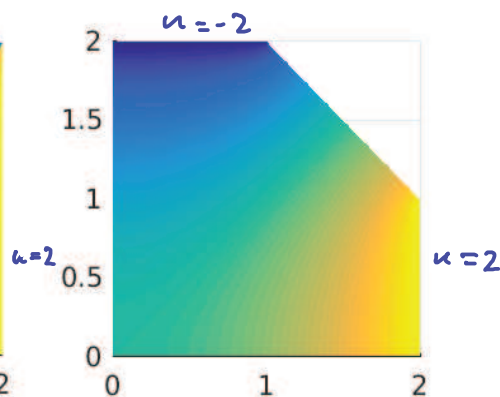
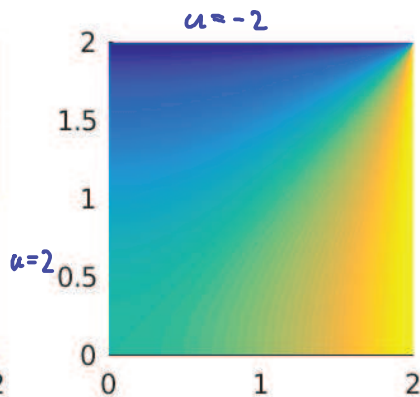
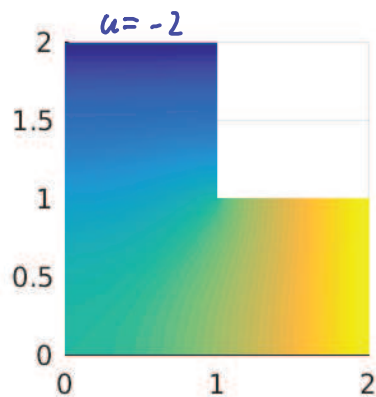
Beachte: Die Abschätzungen setzen voraus, dass $u \in H^2$ & $w_r \in H^2$ mit $|w_r|_{H^2} \leq C \|r\|_{L^2}$;

Oft gilt jedoch nicht $u, w_r \in H^2$, z.B. für $\Omega = \square \Rightarrow \|u_h - u\| = O(h^{\frac{1}{2}})$ ^{keiner}

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissonsgleichung)

Lineare FE: Beispielrechnung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega$$



Lineare FE: Regularität (Friedrichs-Theorem)

Wir haben gezeigt $\|u_h - u\|_{H^1} \leq Ch |u|_{H^2}$ & $\|u_h - u\|_{L^2} \leq Ch^2 |u|_{H^2}$ falls $|u_r|_{H^2} \leq C \|r\|_{L^2}$

Sind $u, u_r \in H^2$, gilt $|u_r|_{H^2} \leq C \|r\|_{L^2}$, und wie groß ist $|u|_{H^2}$?

Bsp: $\Omega = [0,1]^2$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$, $\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$,

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in X = H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in X \\ u_r \in X, \quad a(v, u_r) = (r, v)_{L^2} \quad \forall v \in X \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |u|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2} \\ |u_r|_{H^2} \leq C \|r\|_{L^2} \end{array} \right.$$

Bew: (Beweis für u ; für u_r analog) $\|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 = a(u, u) = \ell(u) \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$

$$\begin{aligned} |u|_{H^2}^2 &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \, dx = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \, dx \\ &= \|\Delta u\|_{L^2}^2 = \|f - u\|_{L^2}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2}^2 + 2 \|u\|_{L^2}^2 \leq 2(1+1) \|f\|_{L^2}^2 \quad \square \end{aligned}$$

Thm: (z.B. Gilbarg & Trudinger Thm. 8.12) Sei Ω beschränkt, $\partial\Omega$ C^2 -regulär,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u^T A \nabla v + u b \cdot \nabla v - c \cdot \nabla u v - d u v \, dx, \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

A, b Lipschitzstetig, $c, d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, a koerziv, $u \in H^2(\Omega)$.

Die schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von $a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$, $u = h$ auf $\partial\Omega$,

$$\text{erfüllt} \quad \|u\|_{H^2} \leq C (\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} + \|h\|_{H^2}) \quad (C \text{ abhängig von } \Omega, A, b, c, d)$$

FEM: Allgemeine FE-Räume

Def: Ein finites Element ist ein Tripel $(K, P, \mathcal{N}) =$

(Elementgebiet, Raum der Formfunktionen, Menge nodaler Variablen) mit

- $K \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, einfach zusammenhängend mit stückweise glattem Rand
- P einem k -dimensionalen Raum an Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$
- $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\}$ einer Menge linear unabhängiger linearer Funktionale auf P

Def: Sei $(K, P, \mathcal{N})$ ein finites Element, und sei $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ eine Basis von P dual zu $\mathcal{N}$, d.h. $N_i(\psi_j) = \delta_{ij}$. Eine solche Basis heißt nodale Basis für P .

Thm: $\psi, \tilde{\psi} \in P$ mit $N(\psi) = N(\tilde{\psi}) \forall N \in \mathcal{N} \Rightarrow \psi = \tilde{\psi}$

Bew: $N(\psi - \tilde{\psi}) = N(\psi) - N(\tilde{\psi}) = 0 \forall N \Rightarrow$ es reicht zu zeigen, dass $N(\phi) = 0 \forall N \Rightarrow \phi = 0$

Sei $\phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \psi_i$, dann $0 = N_j(\phi) = \sum_{i=1}^k \alpha_i N_j(\psi_i) = \alpha_j \quad \forall j. \quad \square$

Def: Eine Unterteilung eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine endliche Menge $\{K_1, \dots, K_M\}$ offener Mengen mit

(1) $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (2) $\bar{K}_1 \cup \dots \cup \bar{K}_M = \bar{\Omega}$



Def: Sei $\{K_1, \dots, K_M\}$ Unterteilung von Ω und $(K_i, P_i, \mathcal{N}^i)$ ein finites Element $\forall i=1, \dots, M$. $X_h = \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_{K_i} \in P_i, N(\phi|_{K_i}) = N(v) \forall N \in \mathcal{N}^i \forall i=1, \dots, M\}$ heißt finite-Elemente-Raum.

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissonsgleichung)

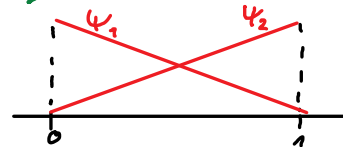
FEM: FE-Beispiele

Bsp: (1D-Lagrange-Element) $K=(0,1)$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1=\{\text{Polynome von Grad 1}\}$, $\mathcal{N}=\{N_1, N_2\}$

$\dim \mathcal{P}=?$

$$N_1(v) = v(0), \quad N_2(v) = v(1)$$

$$\text{nodale Basis: } \psi_1(x) = 1-x, \quad \psi_2(x) = x$$

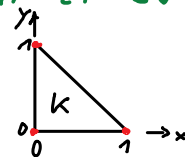


Bsp: (2D-Lagrange-Element) $K=T:=\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y \leq 1-x\}$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1$, $\mathcal{N}=\{N_1, N_2, N_3\}$

$\dim \mathcal{P}=?$

$$N_1(v) = v(0,0), \quad N_2(v) = v(1,0), \quad N_3(v) = v(0,1)$$

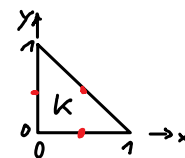
$$\text{nodale Basis: } \psi_1(x,y) = 1-x-y, \quad \psi_2(x,y) = x, \quad \psi_3(x,y) = y$$



Bsp: (2D-Crouzeix-Raviart-Element) $K=T$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1$, $\mathcal{N}=\{N_1, \dots, N_3\}$

$$N_1(v) = v(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad N_2(v) = v(0, \frac{1}{2}), \quad N_3(v) = v(\frac{1}{2}, 0)$$

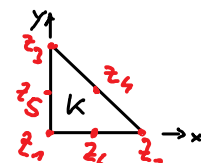
$$\text{nodale Basis: } \psi_1(x,y) = 2(x+y)-1, \quad \psi_2(x,y) = 1-2x, \quad \psi_3(x,y) = 1-2y$$



Bsp: (2D-Lagrange-Element) $K=T$, $\mathcal{P}=\mathcal{P}_2$, $\mathcal{N}=\{N_1, \dots, N_6\}$; $N_i(v) = v(z_i)$

$$\psi_1(x,y) = (1-2x-2y)(1-x-y), \quad \psi_2(x,y) = -x(1-2x), \quad \psi_3(x,y) = -y(1-2y),$$

$$\psi_4(x,y) = 4xy, \quad \psi_5(x,y) = 4y(1-x-y), \quad \psi_6(x,y) = 4x(1-x-y)$$

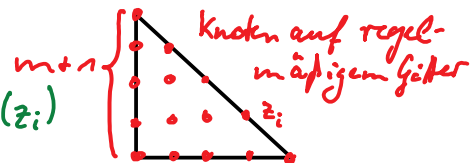


Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissonsgleichung)

FEM: FE-Beispiele

Bsp: (2D-Lagrange-Element m-ter Ordnung)

$$K = T, P = P_m, \mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\}, k = 1 + 2 + \dots + (m+1), N_i(v) = v(z_i)$$



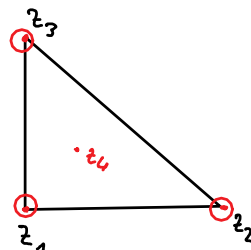
Bsp: (2D Hermite-Element) $K = T, P = P_3$ $\dim P = ?$

$$N_1(v) = v(z_1), N_2(v) = v(z_2), N_3(v) = v(z_3), N_4(v) = v(z_4)$$

$$N_5(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_1), N_6(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2), N_7(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_3)$$

$$N_8(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_1), N_9(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_2), N_{10}(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_3)$$

nodale Basis: ermitte mittels Polynom-Interpolation



Bsp: (2D Hermite-Element m-ter Ordnung)

$$K = T, P = P_m, \mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\}, k = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8
k	3	6	10	15	21	28	36	45

$N_i(v)$ = Funktionswerte bzw. Richtungsableitungen bis Ordnung l in z_1, z_2 , bzw. z_3

Es gibt $l+1$ unabhängige Richtungsableitungen der Ordnung l

$$\Rightarrow 3(1+2+\dots+(l+1)) = 3 \frac{(l+1)(l+2)}{2} =: L \text{ Formfunktionen} \Rightarrow \text{wähle } l = \left\lfloor \frac{-3 + \sqrt{1+8k/3}}{2} \right\rfloor$$

& ergänze um $k-L$ Formfunktionen an z_4

FEM: Interpolante

Def.: Sei (K, P, N) ein finites Element mit nodaler Basis $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Die lokale Interpolante einer Funktion $v: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist $I_K v = \sum_{i=1}^n N_i(v) \psi_i$.

Sei $\{K_1, \dots, K_M\}$ Unterteilung von Ω und (K_i, P_i, N_i) ein finites Element $\forall i=1, \dots, M$.

Die globale Interpolante $I_h v$ von $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $I_h v|_{K_i} = I_{K_i} v \quad \forall i$.

Der zugehörige finite-Elemente-Raum läßt sich darstellen als $X_h = \{I_h v \mid v \in C^\infty(\bar{\Omega})\}$.

Def.: Ist $I_h v \in C^r(\bar{\Omega}) \quad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$, so heißt X_h ein C^r finite-Elemente-Raum.

Thm.: Für eine Triangulierung mit Lagrange- oder Hermite-Elementen ist der zugehörige FE-Raum ein C^0 -FE-Raum.

Bew.: Es reicht zu zeigen, dass auf einer Kante $e = \bar{K}_i \cap \bar{K}_j$ zwischen zwei Elementen gilt $I_{K_i} v|_e = I_{K_j} v|_e \quad \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Für ein Lagrange-Element m -ter Ordnung sind $I_{K_i} v|_e, I_{K_j} v|_e$ 1D-Polynome vom Grad m

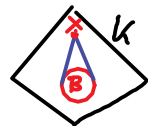
$\Rightarrow$ die Bedingungen $I_{K_i} v(z_r) = v(z_r) = I_{K_j} v(z_r)$ für die $m+1$ Punkte z_r auf e

implizieren $I_{K_i} v|_e = I_{K_j} v|_e$. Hermite-Element: HA

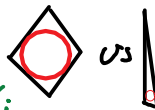
□

FEM: Bramble-Hilbert-Lemma

Def.: $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bzgl. eines Balls $B \subset K$, falls die konvexe Hülle von $\{x\} \cup B$ für alle $x \in K$ erfüllt $\text{co}(\{x\} \cup B) \subset K$.



Eine Unterteilung $\{K_1, \dots, K_M\}$ von Ω heißt $\frac{1}{p}$ -quasiuniform oder regulär, falls $\forall i = 1, \dots, M$: $\frac{1}{p} \leq \frac{\tau_{K_i}}{h_{K_i}}$, wobei τ_{K_i} = Durchmesser des größten Balls in K_i .



, Stephen, nicht David

Thm.: (Bramble-Hilbert-Lemma) Sei $\{K_1, \dots, K_M\}$ eine $\frac{1}{p}$ -quasiuniforme Unterteilung von dem beschränkten offenen Gebiet Ω , und seien $(K_i, P^i, \mathcal{N}^i)$ finite Elemente mit

- (1) K_i sternförmig bzgl. eines Balls,
- (2) $P_{m-1} \subset P^i \subset C^m(\bar{K}_i)$,
- (3) $\mathcal{N}^i \subset$ beschränkte Linearformen auf $C^2(\bar{K}_i)$,

diese Form des Lemmas ist eigentlich von Dupont & Scott

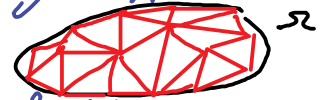
dann gilt für $m > \ell + \frac{n}{2}$ und $0 \leq j \leq m$: $|v - I_{K_i} v|_{H^j(K_i)} \leq C(m, n, p) h_{K_i}^{m-j} |v|_{H^m(K_i)}$
 $\Rightarrow |v - I_h v|_{H^j(\Omega)} \leq C(m, n, p) h^{m-j} |v|_{H^m(\Omega)}$ falls $I_h v \in H^j(\Omega)$

Kor.: $\|u_h - u\|_{H^s} \leq C h^{m-s} |u|_{H^m}$ für unsere elliptischen Probleme & C^0 -FE-Approximationen

Variational Crimes: Abweichung von exakten Methoden

Bisher haben wir FE-Approximationen betrachtet, bei denen u_h die gleiche schwache Gleichung erfüllt wie u (d.h. $a(u, v) = l(v) \forall v \in X$), nur auf einem Unterraum X_h . In der Praxis wird davon jedoch oft abgewichen, z.B.

- Ω hat krummlinigen Rand $\partial\Omega$, wird jedoch mit Triangulierungen approximiert



- Die Systemmatrix $A_{mn} = \int_{\Omega} Q(\phi_m, \phi_n) dx$ oder rechte Seite $B_m = \int_{\Omega} f \phi_m dx$ werden nur approximativ berechnet, z.B. mit Quadratur
- Der finite-Elemente-Raum X_h ist gar kein Teilraum vom Lösungsraum X (z.B. ist der Crouzeix-Raviart-FE-Raum $\not\subset H^1(\Omega)$)

Solche Abweichungen bezeichnet man als „Variational Crimes“.

Bsp: $l(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$ wird ersetzt durch Mittelpunktsquadratur auf jedem Dreieck T_e der Triangulierung $\mathcal{T}$, d.h. durch

$$l_h(v) = \sum_{e=1}^M |T_e| f(\bar{x}_e) v(\bar{x}_e) \quad \text{mit} \quad \bar{x}_e \text{ den Mittelpunkt von } T_e.$$

Variational Crimes: Strangs erstes Lemma

$u \in X$ löst $a(u, v) = \ell(v) \forall v \in X$; a bilinear, koersiv, beschränkt; ℓ linear, beschränkt

$u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h) \forall v_h \in X_h$; a_h bilinear, gleichgradig koersiv; ℓ_h linear

$X_h \subset X$ d.h. $a_h(v_h, v_h) \geq C \|v_h\|_X^2$ unabh. von h

Übrigens: a_h & ℓ_h müssen nur auf X_h definiert sein! Z.B. könnte $a_h(u_h, v_h)$ den Gradienten von u_h an einem Quadraturpunkt auswerten, für eine Funktion u aus $X = H^1(\Omega)$ würde dies jedoch nicht definiert sein

Thm: (Strangs erstes Lemma) Für ein $K \geq 0$ unabhängig von h gilt

$$\|u_h - u\|_X \leq K \left[\inf_{v_h \in X_h} \left(\|u - v_h\|_X + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_X} \right) + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_X} \right]$$

Bew: Sei $v_h \in X_h$ und $w_h = u_h - v_h$.

$$\begin{aligned} c \|u_h - v_h\|_X^2 &\leq a_h(u_h - v_h, w_h) = a(u - v_h, w_h) + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] + [a_h(u_h, w_h) - a(u, w_h)] \\ &\leq C \|u - v_h\|_X \|w_h\|_X + [a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)] + [\ell(w_h) - \ell_h(w_h)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c \|u_h - v_h\|_X \leq C \|u - v_h\|_X + \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_X} + \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_X}$$

Nutze nun $\|u_h - u\|_X \leq \|u - v_h\|_X + \|u_h - v_h\|_X$



Variational Crimes: Strangs erstes Lemma - Anwendung

Bsp: Löse $-\Delta u + u = f$ auf $\Omega = [0,1]^2$, $u=0$ auf $\partial\Omega$

$\Rightarrow X = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$, $\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ erfüllen LM-Bedingung

$\frac{1}{\rho}$ -quasiumiforme Triangulierung $(\mathcal{T}, \varepsilon, J)$ mit Gitterweite h ; $X_h = 1$ -Ordnung-Lagrange FE-Raum

$a_h = a$, $\ell_h(v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \sum_{x \in \mathcal{V} \cap T} \frac{f(x)v(x)}{3}$ „Trapezregel“

$u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$; wie groß ist $\|u_h - u\|_{H^1}$?

Es gibt $K > 0$ mit $\|u_h - u\|_{H^1} \leq K(h \|u\|_{H^2} + h^2 \|f\|_{C^2}) \leq \tilde{K}(h \|f\|_{L^2} + h^2 \|f\|_{C^2})$

Bew: Strang: $\|u_h - u\|_{H^1} \leq K \left[\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} + \sup_{w_h \in X_h} \frac{|\ell(w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_{H^1}} \right]$

Braunle-Hilbert: $\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} \leq \|u - I_h u\|_{H^1} \leq C(\rho) h \|u\|_{H^2}$

$$\begin{aligned} |\ell(w_h) - \ell_h(w_h)| &= \left| \int_{\Omega} f w_h \, dx - \int_{\Omega} I_h(f w_h) \, dx \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T |f w_h - I_h(f w_h)| \, dx \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \|f w_h - I_h(f w_h)\|_{L^2(T)} \sqrt{|T|} \leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \sqrt{|T|} C(\rho) h^2 |f w_h|_{H^2(T)} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \right)^{\frac{1}{2}} C(\rho) h^2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} |f w_h|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C(\rho) \sqrt{|\Omega|} h^2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} |f w_h|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$|f w_h|_{H^2(T)}^2 = \int_T (w_h D^2 f + D f \otimes \nabla w_h + \nabla w_h \otimes D f)^2 \, dx \leq \rho \left(\max_{x \in \Omega} |D^2(x)|^2 + \max_{x \in \Omega} |D f(x)|^2 \right) \|w_h\|_{H^1(T)}^2$$

□

Variational Crimes: Strangs zweites Lemma

$u \in X$ löst $a(u, v) = \ell(v) \forall v \in X$; a bilinear, koersiv, beschränkt; ℓ linear, beschränkt

$X_h \not\subset X$, d.h. insbesondere $\|\cdot\|_X$ nicht auf X_h definiert!

$\Rightarrow$ nutze (gitterabhängige) Norm $\|\cdot\|_h$ auf $X + X_h$

$u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h) \forall v_h \in X_h$; a_h bilinear; ℓ_h linear

u_h wohldefiniert, wenn
 X_h Hilbertraum mit
 Norm $\|\cdot\|_h$

$$a_h(v_h, v_h) \geq c \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in X_h; \quad |a_h(u, v_h)| \leq C \|u\|_h \|v_h\|_h \quad \forall u \in X + X_h, v_h \in X_h$$

Thm. (Strangs zweites Lemma; Berger-Scott-Strang-Lemma) $\exists K > 0$ unabhängig von h , sodass

$$\|u_h - u\|_h \leq K \left[\underbrace{\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_h}_{\text{„Approximationsfehler“}} + \underbrace{\sup_{w_h \in X_h} \frac{|a_h(u, w_h) - \ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_h}}_{\text{„Konsistenzfehler“}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: Sei } v_h \in X_h, w_h = u_h - v_h. \quad c \|u_h - v_h\|_h^2 &\leq a_h(u_h - v_h, w_h) = a_h(u - v_h, w_h) + [\ell_h(w_h) - a_h(u, w_h)] \\ &\leq C \|u - v_h\|_h \|w_h\|_h + |\ell_h(w_h) - a_h(u, w_h)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_h - v_h\|_h \leq \frac{C}{c} \|u - v_h\|_h + \frac{1}{c} \frac{|\ell_h(w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h}; \quad \text{nutze nun } \|u - u_h\|_h \leq \|u - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h \quad \square$$

Bsp. Beispiele für die Norm $\|\cdot\|_h$ sind gegeben durch

$$\|v\|_{m,h} = \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^m(T)}^2} \quad \left(\neq \|v\|_{H^m(\Omega)} \right)$$

Variational Crimes: Strangs zweites Lemma - Anwendung

$\Omega = [0,1]^2, X = H_0^1(\Omega), f \in L^2(\Omega), a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx, \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ für $u,v \in X$

Crouzeix-Raviart-Elemente auf quasiumiformer Triangulierung $\mathcal{T}_h$ d. Ω .

$X_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \, \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ \& } v \text{ ist stetig an Mittelpunkten der Dreiecksseiten} \\ \text{\& } v = 0 \text{ auf Mittelpunkten der Dreiecksseiten auf } \partial\Omega\}$

$a_h(u,v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx, \ell_h(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ für $u,v \in X_h \neq X!$

$u \in X$ löst $a(u,v) = \ell(v) \, \forall v \in X, u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v) \, \forall v_h \in X_h$

wir wissen: $u \in H^2(\Omega)$ mit $\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}$

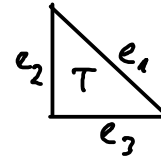
Thm: $\|u_h - u\|_{1,h} \leq ch \|f\|_{L^2}$ für ein $c > 0$. part. Int. & $u \in H^2$

Bew.: $a_h(u, v_h) - \ell_h(v_h) = \sum_{T_i} \int_{T_i} \nabla u \cdot \nabla v_h + u v_h - f v_h \, dx = \sum_{T_i} \int_{\partial T_i} \nabla u \cdot n v_h \, dx - \int_{T_i} v_h (\Delta u - u + f) \, dx$
 $= \sum_{T_i} \sum_{\text{Kante } e \in \partial T_i} \int_e \nabla u(x) \cdot n (v_h(x) - v_h(x_e)) \, dx$ mit $x_e = \text{Mittelpunkt von } e$

da für $e = T_1 \cap T_2$ gilt $\nabla u|_{T_i} \in H^1(T_i)$, sodass nach dem Spursatz $\nabla u|_{T_i} \cdot n_{T_i} = -\nabla u|_{T_2} \cdot n_{T_2}$ auf e
 $\int_e \omega_h - \omega_h(x_e) \, dx = 0$
 $= \sum_{T_i} \sum_{e \in \partial T_i} \int_e (\nabla u - \nabla I_h u) \cdot n (v_h - v_h(x_e)) \, dx \leq \sum_{T_i} \sum_{e \in \partial T_i} \|\nabla(u - I_h u)\|_{L^2(e)} \|v_h - v_h(x_e)\|_{L^2(e)}$

Variational Crimes: Strangs zweites Lemma - Anwendung (Forts.)

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial T_i} |\nabla(u - I_h u)|^2 dx &\leq C h \int_{\partial T} |\nabla(u - I_h u)|^2 \circ \theta_i dx \leq C h \|\mathcal{D}\theta_i\|^2 \int_{\partial T} |\nabla(u \circ \theta_i - I_h u \circ \theta_i)|^2 dx \\
 &\stackrel{\text{Scharf}}{\leq} C h \|\mathcal{D}\theta_i\|^2 \|\nabla(u - I_h u) \circ \theta_i\|_{H^1(\tau)}^2 \stackrel{\text{Broun-Ole-Hilbert}}{\leq} C h \|\mathcal{D}\theta_i\|^2 \|u \circ \theta_i\|_{H^1(\tau)}^2 \\
 &\leq C h \|\mathcal{D}\theta_i\|^2 \int \|\mathcal{D}^2 u\|^2 \circ \theta_i \|\mathcal{D}\theta_i\|^4 dx \leq \tilde{C} h \|\mathcal{D}\theta_i\|^2 \int \|\mathcal{D}^2 u\|^2 \circ \theta_i dx \\
 &= \frac{\tilde{C}}{|\tau_i|} h \|\mathcal{D}\theta_i\|^2 |u|_{H^2(\tau_i)}^2 \leq \hat{C} h |u|_{H^2(\tau_i)}^2 \quad \text{quadratisch}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \partial T_i} \int_e |v_h - v_h(x_e)|^2 dx &\leq C h \sum_{e \in \partial T} \int_e |v_h \circ \theta_i - v_h(\theta_i(x_e))|^2 dx \\
 &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \tilde{C} h \left[\left\| \frac{\partial v_h \circ \theta_i}{\partial x_1} \right\|_{L^2(e_3)}^2 + \left\| \frac{\partial v_h \circ \theta_i}{\partial x_2} \right\|_{L^2(e_2)}^2 + \left\| \nabla(v_h \circ \theta_i) \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} / \sqrt{2} \right\|_{L^2(e_1)}^2 \right] \\
 &\leq \hat{C} h |\nabla v_h|_{T_i} \circ \theta_i|^2 \leq \check{C} h \|\mathcal{D}\theta_i\|^2 |\nabla v_h|_{T_i}|^2 \leq \tilde{C} h |v_h|_{H^1(\tau_i)}^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a_h(u, v_h) - b_h(v_h)| \leq \sum_{T_i} C h |u|_{H^2(\tau_i)} |v_h|_{H^1(\tau_i)} \leq C h |u|_{H^2(\Omega)} \|v_h\|_{1,h} \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

$$\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{1,h}^2 \leq \|u - I_h u\|_{1,h}^2 = \sum_{T_i} \|u - I_h u\|_{H^1(\tau_i)}^2 \leq \sum_{T_i} C h^2 |u|_{H^2(\tau_i)}^2 = C h^2 |u|_{H^2(\Omega)}^2$$

Voraussetzungen von Strangs 2. Lemma erfüllt $\Rightarrow \|u_h - u\|_h \leq \tilde{K} (h |u|_{H^2} + h |u|_{H^2}) \square$

Variational Crimes: Dualität (Erweiterung von Aubin-Nitsche)

- $u \in X$ löst $a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in X$; a bilinear, koerziv, beschränkt; ℓ linear, beschränkt
- Aubin-Nitsche-Bed.: H Hilbertraum mit stetiger Einbettung $X \hookrightarrow H$
- Strangs 2. Lemma-Bed: $a_h(v_h, v_h) \geq c \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in X_h$; $|a_h(u, v)| \leq C \|u\|_h \|v\|_h \quad \forall u, v \in X + X_h$
 a_h linear & beschränkt auf X_h , $\|\cdot\|_h$ Norm auf Hilbertraum X_h
- $u_h \in X_h$ löst $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$
- Zusätzlich:** a_h auf $X + X_h$ definiert, $a_h = a$ auf X , $X_h \subset H$, $\|\cdot\|_h$ definiert auf $X + X_h$

wird nicht in Beweis genutzt

Thm: $w_r \in X$ löse $a(v, w_r) = (r, v)_H \quad \forall v \in X$, $w_h \in X_h$ löse $a_h(v_h, w_h) = (r, v_h)_H \quad \forall v_h \in X_h$.

$$\|u_h - u\|_H \leq \sup_{r \in H} \frac{1}{\|r\|_H} \left(C \|u_h - u\|_h \|w_r - w_h\|_h + [(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r)] + [\ell_h(w_h) - \ell(w_r) - a_h(u, w_h - w_r)] \right)$$

Bew: Setze $r = u_h - u$. $(u_h - u, u_h - u)_H = a_h(u_h - u, w_r - w_h) + \text{Rest}$ *wie Aubin-Nitsche*

$$\text{Rest} = (u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r - w_h) = [(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r)] + a_h(u_h - u, w_h)$$

$$= [(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r)] + [\ell_h(w_h) - \ell(w_r) - a_h(u, w_h - w_r)]$$

$$\Rightarrow \|u_h - u\|_H \leq \frac{1}{\|r\|_H} \left(C \|u_h - u\|_h \|w_r - w_h\|_h + [(u_h - u, r)_H - a_h(u_h - u, w_r)] + [\ell_h(w_h) - \ell(w_r) - a_h(u, w_h - w_r)] \right)$$

Variational Crimes: Dualität - Anwendung

Löse $-\Delta u = f$ auf $[0,1]^2$ mit 0-RB mit Crouzeix-Raviart-Elementen $\Rightarrow$ Setting wie zuvor

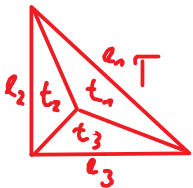
Thm: $\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$ für ein $C > 0$.

Bew: $\cdot H = L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{1,h}$. Wir wissen schon $\|u_h - u\|_{1,h} \leq Ch \|f\|_{L^2}$, $\|w_h - w_r\|_{1,h} \leq Ch \|r\|_{L^2}$.

• Wir haben außerdem schon einmal gezeigt

$$|(v_h, g)_{L^2} - a_h(v_h, w_g)| = |(v_h, g)_{L^2} - a_h(w_g, v_h)| \leq Ch |w_g|_{H^2} \|v_h\|_{1,h}$$

Beachte: Bei vorheriger Rechnung war Testfunktion $v_h \in X_h$, aber auch $v_h \in X + X_h$ möglich



Hierzu ersetze $v_h(x_e)$ durch $\bar{v}_e = \frac{1}{|e|} \int_e v_h(x) dx$ (ist auf X_h das gleiche) und
nutze $\sum_{i=1}^3 \int_{e_i} |v_h - \bar{v}_{e_i}|^2 dx \leq \sum_{i=1}^3 C \|v_h - \bar{v}_{e_i}\|_{H^1(T)}^2 \leq \sum_{i=1}^3 C \|v_h - \bar{v}_{e_i}\|_{H^1(T)}^2 \leq \tilde{C} \sum_{i=1}^3 \|v_h\|_{L^2(T)}^2$
Spursatz Fol. 6.2.3

$$\Rightarrow \begin{cases} (u_h - u, r)_{L^2} - a_h(u_h - u, w_r) \leq Ch |w_r|_{H^2} \|u_h - u\|_{1,h} \leq \tilde{C} h^2 \|r\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \\ L_h(w_h) - L(w_r) - a_h(u, w_h - w_r) \leq Ch |u|_{H^2} \|w_h - w_r\|_{1,h} \leq \tilde{C} h^2 \|f\|_{L^2} \|r\|_{L^2} \end{cases}$$

• Bedingungen voriger Folie erfüllt

$$\Rightarrow \|u_h - u\|_{L^2} \leq \sup_{r \in L^2(\Omega)} \frac{1}{\|r\|_{L^2}} (Ch^2 \|f\|_{L^2} \|r\|_{L^2})$$

□

Dualität: Duale Räume

Def: Sei X ein normierter Vektorraum. Der Dualraum X^* ist der Raum aller beschränkten linearen Funktionale auf X . Für $f \in X^*, x \in X$ schreiben wir auch $f(x) = \langle f, x \rangle_{X^*, X}$. Auf X^* ist durch $\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|_X}$ eine Norm definiert.

Thm: Offensichtlich ist $\langle f, x \rangle_{X^*, X} \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X$.

Bsp: $L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$ & $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ($L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)^*$ nach Hölderungleichung)

Def: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Raum der Testfunktionen ist $C_c^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \phi \text{ kompakt}\}$.

$\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \phi$ in $C_c^\infty(\Omega)$, wenn ein kompaktes $K \subset \Omega$ existiert mit $\text{supp } \phi_j \subset K \quad \forall j$ und $\|\phi_j - \phi\|_{C^k} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k$. Bsp.: $\phi(x) = e^{-(1-|x|)^2}$ für $|x| < 1$ & $\phi(x) = 0$ sonst

Der Raum der Distributionen ist $\mathcal{D}'(\Omega) = \{f: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ linear \& stetig}\}$ (topologischer Dualraum zu $C_c^\infty(\Omega)$). Wir schreiben $f(\phi) = \int_\Omega f \phi dx$ und identifizieren somit Funktionen $f \in L^1(\Omega)$ mit Distributionen. Bsp.: $\int_\Omega \delta \phi dx = \phi(0)$

Für $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und Multiindex α wird die distributionelle Ableitung $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert als $D^\alpha f(\phi) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \phi)$ (part. Integration) Bsp.: $H^1 = \mathcal{D}$

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissonsgleichung)

Dualität: H^{-1}

Beweis mit Lax-Milgram möglich!

Thm: $C_c^\infty(\Omega)$ ist dicht in $H_0^1(\Omega)$, d.h. $\forall u \in H_0^1(\Omega), \varepsilon > 0 \exists \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \|u - \phi\|_{H^1} < \varepsilon$.

Thm: (Rieszischer Darstellungssatz) Ein Hilbertraum X ist isometrisch isomorph zu X^* , d.h. zu jedem $f \in X^*$ gibt es genau ein $u \in X$ mit $\|f\|_{X^*} = \|u\|_X$ und $f(v) = (u, v)_X \forall v \in X$.

Bsp: jedes $f \in L^2(\Omega)^*$ lässt sich schreiben als $f(v) = \int_\Omega uv \, dx$ für ein $u \in L^2(\Omega)$.

Def: $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)^*$. Offensichtlich gilt $H^{-1} \subset \mathcal{D}'$. Wir identifizieren $H^{-1}(\Omega)$ mit den Distributionen f , für die ein $g \in H^1(\Omega)$ existiert, sodass $\langle f, u \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = (g, u)_{H^1} \forall u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Sei $u_j \in C_c^\infty(\Omega), u_j \rightarrow u$ in $H_0^1(\Omega)$, dann ist $\langle f, u; -u_j \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \leq \|g\|_{H^1} \|u; -u_j\|_{H^1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} := \lim_{i \rightarrow \infty} \langle f, u_i \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \lim_{i \rightarrow \infty} (g, u_i)_{H^1} = (g, u)_{H^1}.$$

$$\text{Wir schreiben } \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_\Omega f u \, dx.$$

Bsp: $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ mit $\langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_\Omega f u \, dx$ für $f \in L^2(\Omega)$

$\delta \in H^{-1}((-1, 1)) : f: x \mapsto \delta(x) - \frac{1}{2}|x| \in H^{-1}((-1, 1))$, da $\forall u \in C_c^\infty((-1, 1))$ gilt

$$f(u) = u(0) - \int_{-1}^1 \frac{|x|}{2} u(x) \, dx = (-\frac{|x|}{2}, u)_{H^{-1}}$$

$$\cdot \frac{1}{2}|x| \in L^2((-1, 1)) \subset H^{-1}((-1, 1))$$

Dualität: Elliptische Differentialoperatoren

Thm: $H^{-1}(\Omega)^* = H_0^1(\Omega)$ mit $\langle u, f \rangle_{H^{-1}(\Omega)^*, H^{-1}(\Omega)} = \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$.

Bew: $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)^*$ (es gilt immer $X \subset (X^*)^*$)

Sei nun $z \in H^{-1}(\Omega)^*$ und $R: H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ der Isomorphismus des Riesz'schen Satzes.

Dann existiert ein $u_z \in H_0^1(\Omega)$ mit $z(f) = f(u_z) \forall f \in H^{-1}(\Omega)$, nämlich $u_z = R(z \circ R^{-1}) \square$

Thm: Sei $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $c \in L^2(\Omega)$. Der Differentialoperator $L: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, $Lu = -\operatorname{div}(A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu$ ist beschränkt.

Bew: Sei $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in C_c^\infty(\Omega)$. $\langle Lu, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_\Omega \nabla v \cdot A \nabla u + v b \cdot \nabla u + cuv \, dx \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$

Sei nun $v \in H_0^1(\Omega)$, $v_j \in C_c^\infty(\Omega)$, $v_j \rightarrow v$. $\langle Lu, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle Lu, v_j \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ existiert

(warum?) und $\|L\| \leq C$ (warum?). □

Def: Seien X, Y normierte Räume, $L: X \rightarrow Y$ linear und beschränkt. Der adjungierte Operator $L^*: Y^* \rightarrow X^*$ ist definiert durch $\langle f, Lx \rangle_{Y^*, Y} = \langle L^*f, x \rangle_{X^*, X}$.

Bsp: $L: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, $Lu = -\operatorname{div}(A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu \Rightarrow L^*v = -\operatorname{div}(A^T \nabla v) - \operatorname{div}(bv) + cv$
denn $\int_\Omega (Lu)v \, dx = \int_\Omega u L^*v \, dx$ nach mehrmaliger partieller Integration.

Adaptivität: Idee einer adaptiven FE-Lösung

a priori Fehlerschätzung $\|u - u_h\| \leq \eta_h(u)$

a posteriori Fehlerschätzung $\|u - u_h\| \leq \eta_h(u_h)$

Def: Ein Fehlerschätzer $\eta_h(u_h)$ heißt zuverlässig, falls $\|u - u_h\| \leq \eta_h(u_h)$.

Er heißt effizient mit Konstante $c > 0$, falls $c \eta_h(u_h) \leq \|u - u_h\|$.

Oft lässt ein Fehlerschätzer sich schreiben als Summe $\eta_h(u_h)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h)^2$ über alle FE.

geg. $TOL > 0$: $\eta_{T_e}(u_h) < \frac{TOL}{\sqrt{M}}$ ($\neg$ Verfeinerungskriterium) $\Rightarrow \|u - u_h\| \leq \eta(u_h) < TOL$ (Abbruchbedingung)

Alg. (Adaptive FE)

wähle Anfangsgitter

while Abbruchbedingung nicht erfüllt

 berechne u_h & $\eta_h(u_h)$

 for $l = 1, \dots, M$

 if Verfeinerungskriterium erfüllt für T_e

 verfeinere T_e in kleinere Elemente

Adaptivität: A posteriori-Fehlerschätzung

Def: Das Residuum einer elliptischen pDgl. $Lu=f$ mit $L: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), f \in L^2(\Omega)$ ist $R: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega), R(v) = Lv - f$.

Sei $a(u,v) = \langle Lu, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \ell(v) = (f, v)_{L^2}, a(v,v) \geq c \|v\|_{H^1}^2, a(u,v) \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \forall u, v \in H^1(\Omega)$
 $a(u,v) = \ell(v) \forall v \in H_0^1(\Omega), a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \forall v_h \in X_h \subset H_0^1(\Omega)$
 z.B. $L = (-\Delta + id), a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$

Thm: $C \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|R(u_h)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$

Bew: $\cdot \|R(u_h)\|_{H^{-1}} = \|Lu_h - f\|_{H^{-1}} = \|L(u_h - u)\|_{H^{-1}} \leq C \|u_h - u\|_{H^1}$

$$\begin{aligned} \cdot R(u_h)(u_h - u) &= \int_{\Omega} (Lu_h)(u_h - u) - f(u_h - u) \, dx = a(u_h, u_h - u) - \ell(u_h - u) \\ &= a(u_h - u, u_h - u) \geq c \|u_h - u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|R(u_h)\|_{H^{-1}} \geq \frac{c \|u_h - u\|_{H^1}^2}{\|u_h - u\|_{H^1}} \geq c \|u_h - u\|_{H^1}$$

□

Somit ist $\|R(u_h)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ zuverlässiger, effizienter Fehlerschätzer.

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissonsgleichung)

Adaptivität: A posteriori-Fehlerschätzung in L^2

- $u \in X$ löst $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X$; a bilinear, koerziv, beschränkt; l linear, beschränkt
 a & l sodass $u \in H^2$, z.B. $\Omega = [0, 1]^2$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$, $l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$, $f \in L^2(\Omega)$
 $a(u, v) = \langle Lu, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle u, L^* v \rangle_{H_0^1, H^{-1}}$ für einen Differentialoperator $L: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$
z.B. $L = (-\Delta + id)$
- $u_h \in X_h \subset X$ löst $a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in X_h$ (Finite Elemente auf quasiuniformer Triangulierung T)

Thm: $\|u - u_h\|_{L^2} \leq C h \|R(u_h)\|_{H^{-1}}$

Bew.: w löse duales Problem $a(v, w) = (u - u_h, v)_{L^2} \quad \forall v \in X$ (siehe Aubin-Nitsche)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= (u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, w) = a(u - u_h, w - w_h) \quad \forall w_h \in X_h \\ &= \langle Lu - Lu_h, w - w_h \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = R(u_h)(w_h - w) \leq \|R(u_h)\|_{H^{-1}} \|w_h - w\|_{H^1} \\ &\stackrel{w_h = I_h w}{\leq} C \|R(u_h)\|_{H^{-1}} h |w|_{H^2} \leq C \|R(u_h)\|_{H^{-1}} h \|u - u_h\|_{L^2} \quad \square \end{aligned}$$

Mit den folgenden Techniken kann dies weiter verfeinert werden, sodass auf jedem Dreieck T das lokale h_T statt h benutzt wird.

Adaptivität: Lokaler Fehlerschätzer

Sei $a(u,v) = (f,v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(u,v) = \langle Lu, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ koerziv & beschränkt, $Lu = -\operatorname{div}(A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu, f \in L^2(\Omega)$

1) $\|R(u_h)\|_{H^{-1}}$ schwer zu berechnen 2) wir möchten Fehlerschätzer für jedes Element

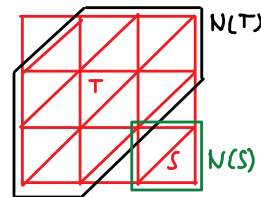
$\Rightarrow$ wir werden $\|R(u_h)\|_{H^{-1}}^2$ ersetzen durch $\eta_h(u_h)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T(u_h)^2$ mit

$$\eta_T(u_h)^2 := h_T^2 \|Lu_h - f\|_{L^2(T)}^2 + h_T \| [A \nabla u_h \cdot n] \|^2_{L^2(\partial T)} \quad [\cdot] = \text{Sprung über Kante}$$

und Zuverlässigkeit & (fast) Effizienz zeigen. Zutaten:

(a) $\frac{2}{p}$ quasiuniforme Triangulierung $\mathcal{T}$,

$$N(T) = \{T_e \in \mathcal{T} \mid \overline{T_e} \cap \overline{T} \neq \emptyset\} \quad \text{für } T \in \mathcal{T}, \quad N(S) = \overline{T_e} \cap \overline{T_j} \quad \text{für } S = \overline{T_e} \cap \overline{T_j}$$



(b) Galerkin-Orthogonalität $\langle R(u_h), \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = a(u_h - u, \varphi) = a(u_h - u, \varphi - \varphi_h)$

(c) $\exists$ (Quasi-)Interpolation $J_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow X_h \subset H_0^1(\Omega)$, sodass $\forall K \in \mathcal{T}$ d.h. $\leq C(p) \dots$

$$\|J_h v - v\|_{H^{-1}(K)} \lesssim \| \nabla v \|_{L^2(N(K))} \quad \|J_h v - v\|_{L^2(K)} \lesssim h_K \| \nabla v \|_{L^2(N(K))} \quad (\text{siehe später})$$

(d) Spuralabschätzung $\|v\|_{L^2(S)} \lesssim h_T^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(T)} + h_T^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(T)} \quad \forall T \in \mathcal{T}, S \in \partial T, v \in H^1(T) \quad \text{HA}$

(e) Poincaré-Ungleichung $\|v\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|v\|_{H^1(T)} \quad \forall T \in \mathcal{T}, v \in H_0^1(T) \quad \text{HA}$

Adaptivität: Zuverlässigkeit lokaler Fehlerschätzer

Thm: Sei u_h die FE-Lösung. Es existiert $C = C(\Omega, p) > 0$ mit $\|R(u_h)\|_{H^{-1}}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K(u_h)^2$.

Bew: $\langle R(u_h), \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \stackrel{(b)}{=} a(u_h - u, \varphi - \varphi_h) = a(u_h, \varphi - \varphi_h) - (f, \varphi - \varphi_h)_{L^2(\Omega)}$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla(\varphi - \varphi_h) \cdot A \nabla u_h + (\varphi - \varphi_h)(b \cdot \nabla u_h + c u_h - f) dx$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}} (L u_h - f, \varphi - \varphi_h)_{L^2(K)} + \int_{\partial K} (\varphi - \varphi_h)(A \nabla u_h) \cdot n dx$$

$$= \sum_{K \in \mathcal{T}} (L u_h - f, \varphi - \varphi_h)_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \int_{\partial K} (\varphi - \varphi_h) [A \nabla u_h] \cdot n dx$$

Hölder $\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|L u_h - f\|_{L^2(K)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \| [A \nabla u_h] \cdot n \|_{L^2(\partial K)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\partial K)}$

$\stackrel{(a)}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}} \|L u_h - f\|_{L^2(K)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(K)} + \| [A \nabla u_h] \cdot n \|_{L^2(\partial K)} (h_K^{-\frac{1}{2}} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(K)} + h_K^{\frac{1}{2}} |\varphi - \varphi_h|_{H^1(\Omega)})$

wähle $\varphi_h = f_h$

Cauchy-Schwarz

$$\stackrel{(c)}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\|L u_h - f\|_{L^2(K)} h_K + \| [A \nabla u_h] \cdot n \|_{L^2(\partial K)} h_K^{\frac{1}{2}} \right) \|\nabla \varphi\|_{L^2(N(K))}$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|L u_h - f\|_{L^2(K)}^2 + h_K \| [A \nabla u_h] \cdot n \|_{L^2(\partial K)}^2} \sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(N(K))}^2}$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(N(K))}^2 \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(K)}^2 = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$\|R(u_h)\|_{H^{-1}} = \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle R(u_h), \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|\varphi\|_{H^1}} \lesssim \sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2(u_h)}$$

□

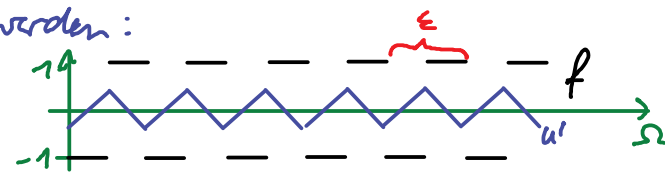
Adaptivität: Effizienz lokaler Fehlerschätzer

Setze $r \in L^2(\Omega)$, $r|_T = (Lu_h - f)|_T \quad \forall T \in \mathcal{T}$, $\bar{r} \in L^2(\Omega)$, $\bar{r}|_T = \frac{1}{|T|} \int_T r dx$
 $j \in L^2(S) \quad \forall \text{ Kanten } S$, $j|_S = [A \nabla u_h \cdot n]$, $\bar{j} \in \mathcal{P}_1(S) \quad \forall S$ lineare Approximation an j
 $\Rightarrow \eta_T(u_h)^2 = h_T^2 \|r\|_{L^2(T)}^2 + h_T \sum_{S \in \partial T} \|j\|_{L^2(S)}^2$

Thm: $\eta_T(u_h)^2 \lesssim \|u_h - u\|_{H^1(N(T))}^2 + h_T^2 \|\bar{r} - \bar{r}\|_{L^2(N(T))}^2 + h_T \|j - \bar{j}\|_{L^2(\partial T)}^2$ lokale Effizienz!
 $\Rightarrow \eta_h(u_h)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T(u_h)^2 \lesssim \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} (h_T^2 \|\bar{r} - \bar{r}\|_{L^2(N(T))}^2 + h_T \|j - \bar{j}\|_{L^2(\partial T)}^2)$
 $\Rightarrow \eta_h(u_h)$ ist effizient bis auf Oszillationsterme

Die Oszillationsterme können nicht ignoriert werden:

Bsp: $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$, $a(u, v) = (f, v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$,



$a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2} \quad \forall v_h \in X_h = \text{linear FE-Raum.}$

Sei $\varepsilon \ll h_T \Rightarrow (f, v_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow u_h = 0$, doch $u'(x) = \begin{cases} x, & x \in \varepsilon i + [\varepsilon/4, \varepsilon/4], i \in \mathbb{N} \\ -x, & \text{sonst} \end{cases}$

$\eta_h(u_h)^2 = h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = h^2 |\Omega|$

$\|u_h - u\|_{H^1}^2 \approx \|\nabla(u_h - u)\|_{L^2}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \frac{\varepsilon^2}{3 \cdot 4^2} |\Omega| \quad \not\approx \eta_h(u_h)^2$!

Adaptivität: Effizienz lokaler Fehlerschätzer (Beweis)

Bew.: $h_S^{\frac{1}{2}} \|j\|_{L^2(S)} \lesssim \|u_h - u\|_{H^1(N(S))} + h_S \|r - \bar{r}\|_{L^2(N(S))} + h_S^{\frac{1}{2}} \|j - \bar{j}\|_{L^2(S)}$, denn

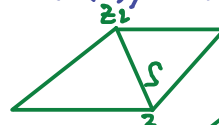
- erweitere $\bar{j}$ linear von S auf $N(S)$ sodass $\|\bar{j}\|_{L^2(N(S))} \lesssim h_S^{\frac{1}{2}} \|j\|_{L^2(S)}$

- Sei $\varphi \in W_0^{1,\infty}(N(S))$ für Kante S mit

$$\varphi \geq 0, \int_S p^2 \varphi \, dx \sim \int_S p^2 \, dx \quad \forall p \in \mathcal{P}_1, \quad \|\varphi\|_{L^\infty(N(S))} + h_S \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(N(S))} \lesssim 1$$

Bsp: (Kanten-Bubble) $\cdot \varphi = \psi_{z_1}, \psi_{z_2}$

(Verführer)



(Dörfler)

$\psi_2 =$ Hütchenfunktion in z

$$\cdot \varphi = \psi_2$$

$$\|\bar{j}\|_{L^2(S)}^2 \lesssim \int_S \bar{j} (\bar{j} \varphi) \, dx = \int_S j \psi_S \, dx + \int_S (\bar{j} - j) \psi_S \, dx$$

- $|\int_S j \psi_S \, dx| \lesssim \|r\|_{L^2(N(S))} \|\psi_S\|_{L^2(N(S))} + \|u - u_h\|_{H^1(N(S))} \|\psi_S\|_{H^1(N(S))}$, da

$$\int_S j \psi_S \, dx = \alpha(u_h - u, \psi_S) - \int_{N(S)} r \psi_S \, dx$$

- $\|\psi_S\|_{L^2(N(S))} \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\bar{j}\|_{L^2(N(S))} \|\varphi\|_{L^\infty(N(S))} \lesssim h_S^{\frac{1}{2}} \|\bar{j}\|_{L^2(S)}$ und

$$\|\psi_S\|_{H^1(N(S))} \leq \|\psi_S\|_{L^2(N(S))} + \|\nabla \psi_S\|_{L^2(N(S))} \lesssim h_S^{\frac{1}{2}} \|\bar{j}\|_{L^2(S)} + \|\bar{j} \nabla \varphi\|_{L^2(N(S))} + \|\varphi \nabla \bar{j}\|_{L^2(N(S))}$$

$$\leq h_S^{\frac{1}{2}} \|\bar{j}\|_{L^2(S)} + \|\bar{j}\|_{L^2(N(S))} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(N(S))} + \|\nabla \bar{j}\|_{L^2(N(S))} \|\varphi\|_{L^\infty(N(S))} \lesssim h_S^{\frac{1}{2}} \|\bar{j}\|_{L^2(S)} \quad \text{HA}$$

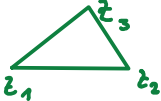
- $\|j\|_{L^2(S)} \sim \|\bar{j}\|_{L^2(S)} \lesssim \frac{\int_S j \psi_S \, dx}{\|\bar{j}\|_{L^2(S)}} + \|\bar{j} - j\|_{L^2(S)} \frac{\|\psi_S\|_{L^2(S)}}{\|\bar{j}\|_{L^2(S)}}$ nutze (d), obigen & folgende Abschätzung für $\|r\|_{L^2(N(S))}$

Adaptivität: Effizienz lokaler Fehlerschätzer (Beweis Forts.)

$$\cdot h_T \|r\|_{L^2(T)} \lesssim \|u_h - u\|_{H^1(T)} + h_T \|r - \bar{r}\|_{L^2(T)}, \text{ denn}$$

$$\cdot h_T \|r\|_{L^2(T)} \leq h_T \|\bar{r}\|_{L^2(T)} + h_T \|r - \bar{r}\|_{L^2(T)}$$

$$\cdot \text{Sei } \psi \in W_0^{1,\infty}(T) \text{ mit } \int_T \psi dx = 1, \quad \|\nabla \psi\|_{L^\infty(T)} \lesssim h_T^{-1}$$

Bsp: (Element-Blase) $\cdot \psi = c \psi_{z_1} \psi_{z_2} \psi_{z_3}$  (Verfärbt)

$\cdot \psi = c \psi_z$  (Dörfler)

$$\begin{aligned} \|\bar{r}\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T \bar{r} (\bar{r} \psi) dx \leq \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\bar{r} \psi\|_{H^1(T)} \lesssim \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\nabla(\bar{r} \psi)\|_{L^2(T)} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\bar{r}\|_{L^2(T)} \|\nabla \psi\|_{L^\infty(T)} \lesssim h_T^{-1} \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \|\bar{r}\|_{L^2(T)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\bar{r}\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-1} \|\bar{r}\|_{H^{-1}(T)} \leq h_T^{-1} \|r\|_{H^{-1}(T)} + h_T^{-1} \|r - \bar{r}\|_{H^{-1}(T)}$$

$$\cdot \|r\|_{H^{-1}(T)} = \sup_{\omega \in H_0^1(T)} \frac{\langle r, \omega \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|\omega\|_{H^1(T)}} = \sup_{\omega \in H_0^1(T)} \frac{a(u_h - u, \omega)}{\|\omega\|_{H^1(T)}} \lesssim \|u_h - u\|_{H^1(T)}$$

$$\cdot \|r - \bar{r}\|_{H^{-1}(T)} = \sup_{\omega \in H_0^1(T)} \frac{\langle r - \bar{r}, \omega \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|\omega\|_{H^1(T)}} \leq \sup_{\omega \in H_0^1(T)} \frac{\|r - \bar{r}\|_{L^2(T)} \|\omega\|_{L^2(T)}}{\|\omega\|_{H^1(T)}} \stackrel{(2)}{\lesssim} h_T \|r - \bar{r}\|_{L^2(T)}$$

$$\cdot \eta_T(u_h)^2 = h_T^2 \|r\|_{L^2(T)}^2 + h_T \sum_{S \in \partial T} \|j\|_{L^2(S)}^2$$

$$\lesssim \|u_h - u\|_{H^1(T)}^2 + h_T^2 \|r - \bar{r}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{S \in \partial T} \left(\|u_h - u\|_{H^1(N(S))}^2 + h_S^2 \|r - \bar{r}\|_{L^2(N(S))}^2 + h_S \|j - \bar{j}\|_{L^2(S)}^2 \right) \square$$

Adaptivität: Clément-Interpolation

Thm: Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $m \geq 0$, $p \in [1, \infty]$, $X_h = \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_k(T) \ \forall T \in \mathcal{T}, v|_{\partial\Omega} = 0\}$

hängt von
Quasiumiformität ab gibt es einen linearen Operator $\tilde{I}_h: L^1(\Omega) \rightarrow X_h$, sodass

$$\|D^t(v - \tilde{I}_h v)\|_{L^q(T)} \lesssim h_T^{s - \frac{d}{p} - t + \frac{d}{q}} \|D^s v\|_{L^p(N(T))}$$

$$\forall v \in W^{m,p}(\Omega), T \in \mathcal{T}, 0 \leq t \leq s \leq \min(m, k+1) \quad s - \frac{d}{p} \geq t - \frac{d}{q}.$$

Insbesondere $\|v - \tilde{I}_h v\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$ & $\|\nabla(v - \tilde{I}_h v)\|_{L^2(T)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$

Hier für Lagrange-FE 1. Ordnung für $H_0^1(\Omega)$.

Def: (Clément-Interpolation) M_i sei der Träger der stückweise affinen Hütchenfunktion im Knoten z_i :

$\cdot P_{M_i}: L^2(M_i) \rightarrow X_h(M_i) = \{v_h|_{M_i} \mid v_h \in X_h\}$ ist definiert als die L^2 -orthogonale Projektion,

d.h. $\|v - P_{M_i} v\|_{L^2(M_i)} = \inf_{v_h \in X_h(M_i)} \|v - v_h\|_{L^2(M_i)}$

warum?
($P_{M_i} v$ ist die nach Lax-Milgram wohldefinierte Lösung $u \in X_h(M_i)$ von $(u, v_h)_{L^2(M_i)} = (v, v_h)_{L^2(M_i)} \ \forall v_h \in X_h(M_i)$)

$$\cdot \tilde{I}_h v = \sum_{z_i \in \mathcal{V} \cap \Omega} (P_{M_i} v)(z_i) \psi_i \quad \text{für } \psi_i \text{ die Hütchenfunktion in } z_i$$

Thm: Die Clément-Interpolation erfüllt $\|v - \tilde{I}_h v\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$ & $\|\nabla(v - \tilde{I}_h v)\|_{L^2(T)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(N(T))}$

Adaptivität: Clément-Interpolation (Beweis)

Bew.: Für ein inneres Element T_k gilt

Dreiecks- & Hölder-Ungl.

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{L^2(T_k)} \stackrel{\text{Partition der 1}}{=} \left\| \sum_i (v - P_{M_i} v(z_i)) \psi_i \right\|_{L^2(T_k)} \leq \sum_i \|v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_k)}$$

Summe über
Dreiecksknoten

$$\leq \sum_i \|v - P_{M_i} v\|_{L^2(T_k)} + \|P_{M_i} v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_k)} \leq \sum_i \|v - P_{M_i} v\|_{L^2(M_i)} + \|P_{M_i} v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_k)}$$

mit $\bar{v}_M = \frac{1}{|M|} \int_M v dx$ ist

Zurückziehen auf Referenzgebiet, Poincaré, Rücktransformation auf M

$$\|v - P_M v\|_{L^2(M)}^2 \leq \|v - \bar{v}_M\|_{L^2(M)}^2 \stackrel{!}{\leq} h_M^2 \|\nabla(v - \bar{v}_M)\|_{L^2(M)}^2 = h_M^2 \|\nabla v\|_{L^2(M)}^2$$

$$\begin{aligned} \|P_{M_i} v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_k)} &\leq \sum_k \|P_{M_i} v(z_k) - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_k)} = \sum_k |T_k|^{1/2} |P_{M_i} v(z_k) - P_{M_i} v(z_i)| \\ &\leq \sum_k |T_k|^{1/2} h_{T_k} \|\nabla P_{M_i} v\|_{L^\infty(T_k)} = \sum_k h_{T_k} \|\nabla P_{M_i} v\|_{L^2(T_k)} \lesssim h_{T_k} \|\nabla P_{M_i} v\|_{L^2(T_k)} \end{aligned}$$

"Inversenungleichung" HA

$$\|\nabla P_M v\|_{L^2(T_k)} = \|\nabla(P_M v - \bar{v}_M)\|_{L^2(T_k)} = \|\nabla P_M(v - \bar{v}_M)\|_{L^2(T_k)} \leq \|\nabla P_M(v - \bar{v}_M)\|_{L^2(M)} \lesssim \frac{1}{h_M} \|P_M(v - \bar{v}_M)\|_{L^2(M)}$$

$$\|P_M\| \leq 1 \implies \|v - \bar{v}_M\|_{L^2(M)} / h_M \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(M)}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla(v - \mathcal{I}_h v)\|_{L^2(T_k)} &= \left\| \sum_i (\nabla v) \psi_i + (v - P_{M_i} v(z_i)) \nabla \psi_i \right\|_{L^2(T_k)} \lesssim \sum_i \|\nabla v\|_{L^2(T_k)} + \|v - P_{M_i} v(z_i)\|_{L^2(T_k)} / h_{T_k} \\ &\lesssim \sum_i \|\nabla v\|_{L^2(M_i)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(N(T_k))} \end{aligned}$$

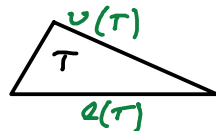
□

Adaptivität: Verfeinerungsstrategie

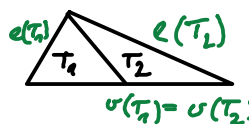
Def: Für ein Dreieck T sei $v(T)$ die jüngste Ecke & $e(T)$ die Kante gegenüber

• Die Bisektion teilt T entlang der Verbindungslinie von $v(T)$ zur Mitte von $e(T)$

Bsp:



Bisektion

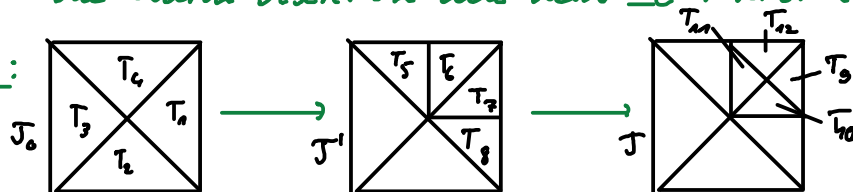


Bisektion

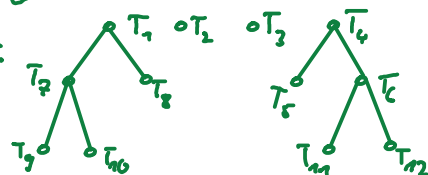


Def: Die Triangulierung T gehe aus T_0 durch (ggfs. mehrfache) Bisektion von Dreiecken hervor. Der zu T gehörende Wald ist ein gerichteter Graph aus Bäumen, deren Knoten Dreiecke entsprechen, deren Wurzeln die Dreiecke von T_0 sind, deren Blätter die Dreiecke von T sind, deren innere Knoten genau zwei Kinder haben, die durch Bisektion aus dem Elternknoten hervorgegangen sind.

Bsp:



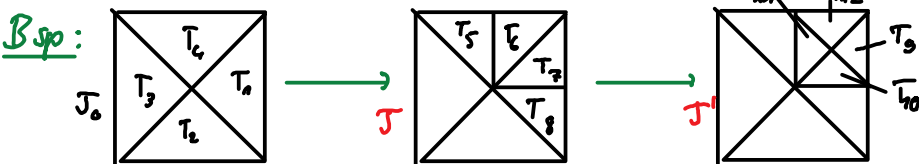
Wald:



Bem: Jede Familie aus Bäumen, deren Wurzeln die Dreiecke von T_0 sind und deren innere Knoten genau zwei Kinder haben, entspricht eindeutig einer Triangulierung T , die aus T_0 durch (ggfs. mehrfache) Bisektion entstanden ist.

Adaptivität: Verfeinerungsstrategie Forts.

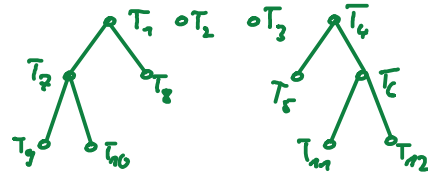
- Def: · Der Level (die Generation) $l(T)$ von $T \in \mathcal{T}$ ist die Entfernung von T zur Wurzel (= Anzahl nötiger Bisektionen, um T aus T_0 zu erhalten).
- Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ die zu $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ gehörenden Wälder. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, heißt $\mathcal{T}'$ Verfeinerung von $\mathcal{T}$. $\mathcal{R} = \mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}')$ ist die Menge verfeinerter Elemente.



$l=0$

$l=1$

$l=2$

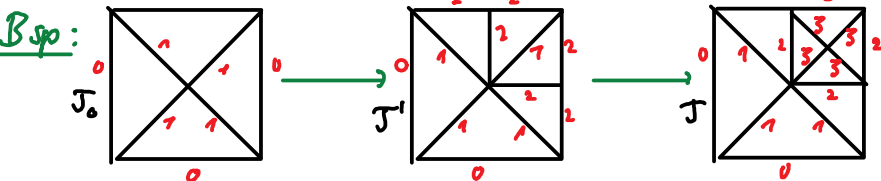


Wir werden nur so verfeinern, dass keine hängenden Knoten auftreten.



Anstelle sich für jedes Dreieck T die Kante $e(T)$ zu merken, kann man die Kanten numerieren.

Def: Sei $T \in \mathcal{T}$. Die Numerierung der Kanten $e \in \partial T$ ist $l(e) = \begin{cases} l(T) & \text{falls } e = e(T) \\ l(T) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$.



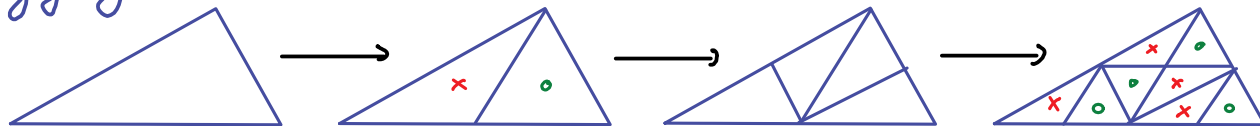
Numerierung sagt, welche Kante als nächstes geteilt werden muss

Adaptivität: Eigenschaften der Bisektionsmethode

Thm: Es gibt ein $\rho > 0$, sodass die durch Bisektion aus T_0 gewonnenen Triangulierungen alle $\frac{1}{\rho}$ -quasiumiform sind.

Bew: 1) Sei $T \in \mathcal{T}$ mit $\ell(T) \geq 3$. Dann ist T ähnlich zu einem Dreieck T' mit $\ell(T') = \ell(T) - 2$.

Es reicht zu zeigen, dass alle aus einem Dreieck T'' durch dreimalige Bisektion hervorgegangenen Dreiecke T ähnlich zu einem T' mit $\ell(T') = \ell(T) - 2$ sind.



2) $\Rightarrow$ Alle Dreiecke sind ähnlich zu einem aus T_0 mittels höchstens zwei Bisektionen hervorgegangenen. Dies sind endlich viele und daher $\frac{1}{\rho}$ -quasiumiform für ein $\rho > 0$. $\square$

Thm: Es gibt $D_2 > D_1 > 0$ abhängig von T_0 , sodass für alle durch Bisektion aus T_0 gewonnenen Dreiecke T gilt $D_1 2^{-\ell(T)/2} \leq h_T \leq D_2 2^{-\ell(T)/2}$.

Bew: Jedes Dreieck T mit $\ell(T) \geq 3$ ist ähnlich zu einem T' mit $\ell(T') = \ell(T) - 2$ & $h_{T'} = 2h_T$.

$\Rightarrow$ Es reicht, die Behauptung für $\ell(T) \leq 2$ zu zeigen.

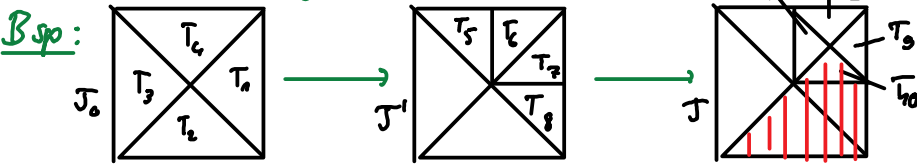
Dort gilt sie mit $D_{1/2} = \min_{\max} \{ h_T 2^{\ell(T)/2} \mid \ell(T) \leq 2 \}$

$\square$

Adaptivität: Verfeinerungsprozedur

Def.: Für $T \in \mathcal{T}$ sei $F(T)$ dasjenige Nachbardreieck mit $\overline{F(T)} \cap \overline{T} = e(T)$ ($F(T) = \emptyset$, falls $e(T) \in \partial\Omega$).

• Eine Kette $\mathcal{L}(T)$ mit Startelement $T \in \mathcal{T}$ ist eine Folge $\{T, F(T), F(F(T)), \dots, F^m(T)\}$ ohne Wiederholung von Elementen und mit $F^{m+1}(T) = \emptyset$ oder $F^{m+1}(T) \in \mathcal{L}(T)$.



$$\mathcal{L}(T_9) = \{T_9\}$$

$$\mathcal{L}(T_{10}) = \{T_{10}, T_8, T_4\}$$

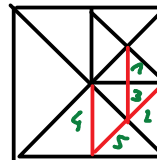
wird T_{10} verfeinert, müssen alle Dreiecke aus $\mathcal{L}(T_{10})$ verfeinert werden, um hängende Knoten zu vermeiden.

Alg.: refine(T); geg: $\mathcal{L}(T) = (T^1, \dots, T^m)$

Bisektion von T^1

for $i = 1$ to $m-1$

2 x Bisektion von T^i



Bisektion von T^m

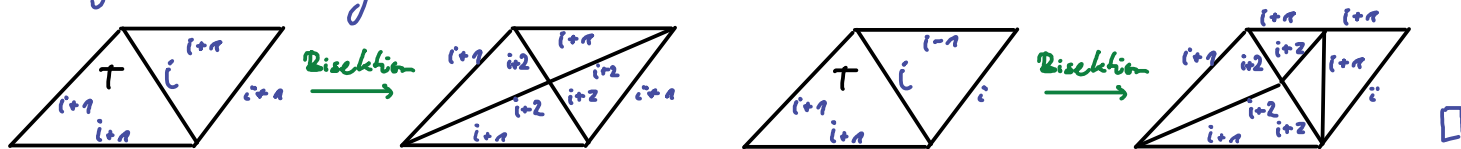
if $F(T^m) \neq T^{m-1}$

Bisektion von T^m

Adaptivität: Verfeinerungsprozedur Forts.

Thm: Während $\text{refine}(T)$ erhalten mehrere Kanten eine neue Nummerierung. Dabei ist die Nummerierung eindeutig, unabhängig von beiden angrenzenden Dreiecken.

Bew: Bei jeder Bisektion gibt es zwei Fälle:



Kor: Für $T \in \mathcal{T}$, $T' = F(T)$ gilt entweder (a) $\ell(T) = \ell(T')$ und die Bisektion von T & T' ist kompatibel oder (b) $\ell(T') = \ell(T) - 1$ und die Bisektion von T ist kompatibel mit der eines Kindes von T' .

- $\ell(T)$ enthält höchstens $\ell(T)$ Elemente
- Ist T' durch $\text{refine}(T)$ entstanden, gilt $\ell(T') \leq \ell(T) + 1$
- Ist T' durch $\text{refine}(T)$ entstanden, gilt $\text{dist}(T, T') \leq D_2 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} 2^{-\frac{\ell(T')}{2}}$

Thm: Es gibt $\Lambda > 0$ abhängig von T_0 , sodass die Anzahl $\# \mathcal{T}_n$ an Elementen in $\mathcal{T}_n$ erfüllt $\# \mathcal{T}_n - \# \mathcal{T}_0 \leq \Lambda n$, wobei $\mathcal{T}_n$ aus $\mathcal{T}_0$ durch n -maliges Anwenden von refine entstand.

Bew: technisch/kompliziert (Biner-Dahmen-De Vore, Stevenson)

Finite Elemente: Elliptische pDgl. (2D Poissongleichung)

Ausblick: Nichtlineare elliptische pDgl.; Gamma-Konvergenz