Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski

WS 16/17

Numerik partieller Differentialgleichungen

Probeklausur
(keine Abgabe)

Aufgabe 1. *Bestimmen Sie, für welche* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *die Gleichung*

$$(1+x)u_{xx}(x,y) + 2\,xy\,u_{xy}(x,y) + y^2 u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) = 0$$

hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist.

Aufgabe 2. *Schreiben Sie in Pseudocode eine Implementierung des* expliziten *Eulerverfahrens für die Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0, \qquad\qquad (x,t) \in [0,L] \times [0,T] \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *Betrachten Sie das folgende Differenzenschema*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right) \qquad U_j^0 = u_0(j\Delta x)$$

zur numerischen Behandlung der Transportgleichung

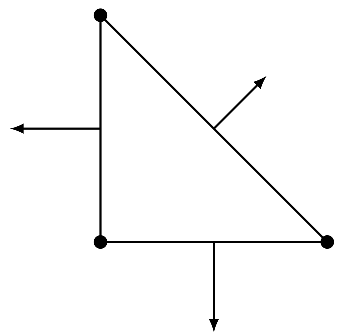
$$\begin{aligned} u_t + a u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{aligned}$$

1. *Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.*
2. *Führen Sie eine* ℓ^2*-von Neumann-Stabilitätsanalyse durch.*

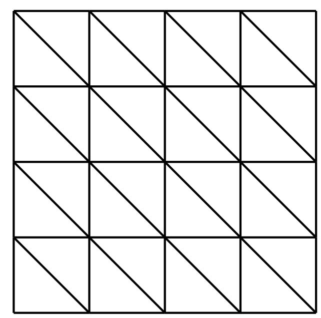
Aufgabe 4. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $u_0 \in L^2(\Omega)$*. Errechnen Sie die Gâteaux-Ableitung des folgenden Funktionals*

$$\mathcal{J}[u] = \frac{1}{2}\|u - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad u \in H^1(\Omega)$$

Aufgabe 5. *In dieser Aufgabe wird das sogenannte* Morley Element *betrachtet:*



1. Morley Element



2. Uniforme Triangulierung

Die Pfeile stehen dabei jeweils für die Auswertung der Normalenableitungen in den Kantenmittelpunkten.

1. *Bestimmen Sie eine nodale Basis zu $\mathcal{P} = \Pi_2$.*
2. *Berechnen Sie* einen *Eintrag der Massematrix $L = \left(\int_\Omega \nabla\phi_i(x) \cdot \nabla\phi_j(x)\ dx\right)_{ij}$, wobei ϕ_i die im Knoten x_i lokalisierte Basisfunktion bezeichne und eine uniforme Triangulierung (vgl. rechte Abbildung) zu Grunde liege.*

Aufgabe 6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$.*

1. *Definieren Sie den Raum $W^{1,p}(\Omega)$.*
2. *Betrachten Sie nun den Spezialfall $\Omega = B_1(0)$: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u(x) = \cos(\|x\|)\,\|x\|^\alpha$ Element von $L^p(\Omega)$ bzw. von $W^{1,p}(\Omega)$?*

   Hinweis: Verwenden Sie bei Bedarf (ohne Beweis) die Ungleichung $(a+b)^p \leq c(a^p + b^p)$, die für $a, b \geq 0$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 7. *Sei $\Omega = [0,1]$, $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten folgendes Problem*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) & = f(x) \qquad x \in \Omega \\ \qquad\qquad\qquad u(y) & = 0 \qquad\quad\ \ y \in \partial\Omega \end{cases}$$

1. *Stellen Sie die schwache Formulierung dieses Problems auf.*
2. *Beweisen Sie unter geeigneten Bedingungen an q die Existenz einer schwachen Lösung dieses Problems in $H_0^1(\Omega)$.*
3. *Leiten Sie das Cea-Lemma her und gewinnen Sie mit seiner Hilfe eine erste, einfache Fehlerabschätzung für den hier betrachteten Spezialfall.*

4. *Wir nehmen an, dass die Lösung des Problems*

$$a(u,w) = (f,w)_{L^2(\Omega)} \;\forall\, w \in H_0^1(\Omega)$$

für ein festes $f \in L^2(\Omega)$ *der Abschätzung* $|u|_{H^2(\Omega)} \leq C_R \|f\|_{L^2(\Omega)}$ *mit einer Konstanten* $C_R > 0$ *genügt. Zeigen Sie, dass die Betrachtung des dualen Problems*

$$\text{Gesucht ist } \varphi \text{ s.d. } a(\varphi,w) = (u-u_h,w)_{L^2(\Omega)} \;\forall\, w \in H_0^1(\Omega)$$

zusammen mit der Abschätzung des Interpolationsfehlers $\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_I h |v|_{H^2(\Omega)}$ *auf die Fehlerabschätzung*

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(C_I,C_R)\, h^2\, |u|_{H^2(\Omega)}$$

führt, wobei $C(C_I,C_R) > 0$ *eine Konstante ist, die (unter anderem) von den Konstanten* $C_I, C_R > 0$ *abhängt.*

5. *Nun werde die Diskretisierung der schwachen Formulierung mit linearen Ansatzfunktionen auf dem äquidistanten Gitter* $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ *mit* $x_i = i/N$ *betrachtet. Der Operator* $\ell(w) = (f,w)_{L^2(\Omega)}$ *werde mit Hilfe der Mittelpunktsregel*

$$\int_a^b h(x)\,dx \;\approx\; (b-a)\,h\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

diskretisiert. Erzielen Sie mit Hilfe des ersten Lemmas von Strang eine Abschätzung für den Fehler $\|u_h - u\|_{H^1}$.