Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski

WS 16/17

Numerik partieller Differentialgleichungen

Lösungsvorschlag der Probeklausur

Aufgabe 1. *Bestimmen Sie, für welche* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *die Gleichung*

$$(1 + x)u_{xx}(x, y) + 2\,xy\,u_{xy}(x, y) + y^2 u_{yy}(x, y) + u_x(x, y) = 0$$

hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist.

Lösungsvorschlag: Wir betrachten die Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \quad a(x, y) = 1 + x, \quad b(x, y) = 2xy, \quad c(x, y) = y^2$$

Wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von M sind, dann gilt

$$\det(M) = \lambda_1\lambda_2 = a(x, y)c(x, y) - \frac{1}{4}b(x, y)^2 = y^2(1 + x - x^2)$$

und wir müssen drei Fälle unterscheiden:

1. Ist $y = 0$ oder $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, so ist die Gleichung parabolisch, da dann $y^2(1 + x - x^2) = 0$ gilt.
2. Der Fall $y^2(1 + x - x^2) > 0$ tritt genau dann ein, falls

$$(x, y) \in \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right) \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

   gilt. Unter diesen Umständen ist die Gleichung elliptisch.
3. In allen anderen Fällen ist die Gleichung hyperbolisch.

Aufgabe 2. *Schreiben Sie in Pseudocode eine Implementierung des* expliziten *Eulerverfahrens für die Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0, &\qquad (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag: Seien $M, N \in \mathbb{N}$ mit $M, N > 0$. Setze $\Delta x = L/M$, $\Delta t = T/N$ und $c = \Delta t/(\Delta x)^2$. Das Verfahren (in Pseudocode) lässt sich dann wie folgt darstellen:

```
for j=0:M
    u(0,j) = f(jL/M);
end

for k=1:N
    u(k,0) = 0; u(k,M) = 0;
    for j=1:M-1
        u(k,j) = (1-2c)u(k-1, j) + u(k-1, j+1) + u(k-1, j-1);
    end
end
```

Aufgabe 3. *Betrachten Sie das folgende Differenzenschema*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right) \qquad U_j^0 = u_0(j\Delta x)$$

zur numerischen Behandlung der Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

1. *Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.*
2. *Führen Sie eine ℓ^2-von Neumann-Stabilitätsanalyse durch.*

Lösungsvorschlag: Mit Hilfe der Taylorentwicklung lässt sich für $u \in C^2$ zeigen, dass

$$\begin{aligned} u(t, x + \Delta x) &= u(t, x) + u_x(t, x)\Delta x + u_{xx}(t, x)(\Delta x)^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\ u(t, x - \Delta x) &= u(t, x) - u_x(t, x)\Delta x + u_{xx}(t, x)(\Delta x)^2 + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Zeilen und anschließende Division durch Δx liefert folgende Approximation von u_x

$$\frac{1}{2\Delta x}[u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)] = u_x(t, x) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Für die Zeitableitung haben wir

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t, x) &= u(t, x) + u_t(t, x)\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\ \Rightarrow \frac{1}{\Delta t}[u(t + \Delta t, x) - u(t, x)] &= u_t(t, x) + \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned}$$

Ersetzt man nun U_j^n in der Verfahrensvorschrift durch $u(t_n, x_j)$, nutzt die hergeleiteten Approximationen an die Orts- und Zeitableitung und macht von der Gleichung $u_t + au_x = 0$ Gebrauch, sieht man, dass Konsistenz von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$ vorliegt.

Wir machen nun den Ansatz $U_j^n = \lambda^n e^{-ij\Delta x}$, $\mu = \Delta t/\Delta x$ und setzen dies in die Verfahrensvorschrift ein:

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}e^{-ij\Delta x} &= \lambda^n e^{-ij\Delta x} - \frac{a}{2}\mu(\lambda^{n+1}e^{-i(j+1)\Delta x} - \lambda^{n+1}e^{-i(j-1)\Delta x})\\ &= \lambda^n e^{-ij\Delta x}(1 - \frac{a}{2}\mu\lambda(e^{-i\Delta x} - e^{i\Delta x}))\end{aligned}$$

Wegen $e^{-i\Delta x} - e^{i\Delta x} = -2\,i\,\sin(\Delta x)$, erhalten wir

$$\lambda = 1 - a\mu\lambda\, i\,\sin(\Delta x) \;\Leftrightarrow\; \lambda = (1 + a\mu\, i\,\sin(\Delta x))^{-1}$$

Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$ und es folgt

$$|\lambda|^2 = (1 + (a\mu)^2\sin^2(\Delta x))^{-1} \le 1$$

Die Analyse zeigt, dass das Verfahren uneingeschränkt stabil ist.

Aufgabe 4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Errechnen Sie die Gâteaux-Ableitung des folgenden Funktionals*

$$\mathcal{J}[u] = \frac{1}{2}\|u - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \quad u \in H^1(\Omega)$$

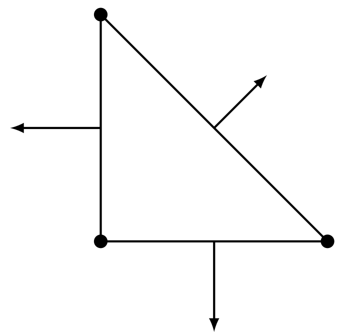
Lösungsvorschlag: Für $u, v \in H^1(\Omega)$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $u + tv \in H^1(\Omega)$. Unter Verwendung von $|\nabla u|^2 = \langle \nabla u, \nabla u\rangle$ und $\|u - u_0\|^2_{L^2} = (u - u_0, u - u_0)_{L^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{J}[u + tv]\big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\partial_t\left(\int_\Omega (u + tv - u_0)^2\,dx + \lambda\int_\Omega \langle\nabla(u + tv), \nabla(u + tv)\rangle\,dx\right)\Bigg|_{t=0}\\ &= (u - u_0, v)_{L^2} + \lambda\int_\Omega\langle\nabla u, \nabla v\rangle\,dx\end{aligned}$$

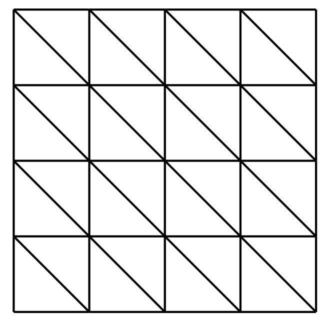
Aufgabe 5. *In dieser Aufgabe wird das sogenannte* Morley Element *betrachtet:*

Die Pfeile stehen dabei jeweils für die Auswertung der Normalenableitungen in den Kantenmittelpunkten.

1. *Bestimmen Sie eine nodale Basis zu $\mathcal{P} = \Pi^2$.*
2. *Berechnen Sie* einen *Eintrag der Steifigkeitsmatrix $L = \left(\int_\Omega \nabla\phi_i(x)\cdot\nabla\phi_j(x)\,dx\right)_{ij}$, wobei ϕ_i die im Knoten x_i lokalisierte Basisfunktion bezeichne und eine uniforme Triangulierung (vgl. rechte Abbildung) zu Grunde liege.*



1. Morley Element



2. Uniforme Triangulierung

Lösungsvorschlag:

1. Wir studieren zunächst die Basisfunktionen für den Spezialfall des Einheitsdreiecks. Eine Basisfunktion hat wegen der Wahl $\mathcal{P} = \Pi^2$ als Ansatzraum die Gestalt $\varphi_i(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$. Der Satz aus Funktionalen besteht aus Knotenauswertungen und der Auswertung der Normalenableitung in den Kantenmittelpunkten. Gemeinsam führt dies auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen des Typs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = e_i$$

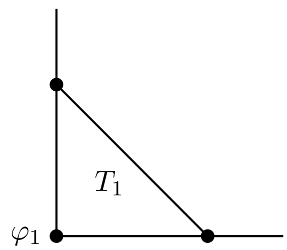
für $i = 1, 2, \ldots, 6$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= 1 - x - y + 2xy \\ \psi_2(x,y) &= \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 \\ \psi_3(x,y) &= \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 \\ \psi_4(x,y) &= -y + y^2 \\ \psi_5(x,y) &= -x + x^2 \\ \psi_6(x,y) &= -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}xy + \frac{y^2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ist T nun ein Dreieck, welches durch eine Abbildung $\Phi : T_{\text{ref}} \to T$ aus dem Einheitsdreieck hervorgeht, dann ist Hütchenfunktion $\varphi_{T,i}$ durch

$$\varphi_{T,i}(x,y) = \psi_i(\Phi^{-1}(x,y))$$

gegeben.



2. Wir betrachten die Funktion φ_1, die wir uns dem Dreieck T_1 in der unteren linken Ecke zugeordnet denken.

   Die Transformation $\Phi_1 : T_{\text{ref}} \to T_1$ die das Referenzdreieck auf T_1 abbildet, ist über die Skalierung $p \mapsto (\Delta x)p$ gegeben, wenn Δx die Gitterweite bezeichnet. Mit Hilfe des Transformationssatzes gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{T_1} \|\nabla\varphi_1(x)\|_2^2 \, dx &= \int_{T_{\text{ref}}} \|\nabla\left[\varphi_1(\Phi_1(x))\right]\|_2^2 \, |\det \Phi_1(x)| \, dx \\
&= \int_{T_{\text{ref}}} \left\| \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -1+2x_2 \\ -1+2x_1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 (\Delta x)^2 \, dx \\
&= \frac{1}{(\Delta x)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (-1+2x_2)^2 + (-1+2x_1)^2 \, dx_2 \, dx_1 \\
&= \frac{1}{3(\Delta x)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$.*

1. *Definieren Sie den Raum $W^{1,p}(\Omega)$.*
2. *Betrachten Sie nun den Spezialfall $\Omega = B_1(0)$: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u(x) = \cos(\|x\|_2)\,\|x\|_2^\alpha$ Element von $L^p(\Omega)$ bzw. von $W^{1,p}(\Omega)$?*

   Hinweis: Verwenden Sie bei Bedarf (ohne Beweis) die Ungleichung $(a+b)^p \leq c(a^p+b^p)$, die für $a, b \geq 0$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

1. Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = 1$. Definiere die Normen $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ durch

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &:= \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &:= \max_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}
\end{aligned}$$

   und setze dann für $p \in \mathbb{R}$ oder auch $p = \infty$

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty\}$$

2. Außerhalb einer ε-Umgebung von 0 können wir $u(x)$ im klassischen Sinne differenzieren und die Regeln partieller Integration anwenden. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\partial_i\varphi\ dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} u\partial_i\varphi\ dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial(\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(0)})} u\nu_i\varphi\ dx - \int_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u\varphi\ dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial\Omega} u\nu_i\varphi\ d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\nu_i\varphi\ d\sigma - \int_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u\varphi\ dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\nu_i\varphi\ d\sigma - \int_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u\varphi\ dx\right)
\end{aligned}$$

Für das erste Integral gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\nu_i\varphi\ d\sigma \leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u\nu_i\varphi|\ d\sigma &\leq c\,\varepsilon^\alpha\,\mathrm{area}(\partial B_\varepsilon(0)) \\
&= \tilde{c}\,\varepsilon^{\alpha+d-1}
\end{aligned}$$

Konvergenz liegt im Fall $\alpha > 1-d$ vor. Bedenkt man $\partial_i u = x_i[\alpha\cos(\|x\|_2)\|x\|_2^{\alpha-2} - \sin(\|x\|_2)\|x\|_2^{\alpha-1}]$, so gilt zusammen mit $|\partial_i u| \leq \alpha\|x\|_2^{\alpha-1} + \|x\|_2^\alpha$ für das zweite Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} \partial_i u\varphi\ dx &\leq \int_\varepsilon^1\int_{S^{d-1}} \left(\alpha r^{\alpha-1} + r^\alpha\right) r^{d-1}|\varphi(r\theta)|\,dr\,d\varphi \\
&\leq C\,|S^{d-1}|\int_\varepsilon^1 \left(\alpha r^{\alpha+d-2} + r^{\alpha+d-1}\right)\ dr
\end{aligned}$$

Konvergenz für $\varepsilon \to 0$ liegt für $\alpha + d - 2 > -1$ vor, was genau dann gilt, wenn $\alpha > 1-d$. Insgesamt ist die Existenz der schwachen Ableitung $\partial_i u$ für $\alpha > 1-d$ gesichert.
Um die Bedingungen für $u \in L^p(\Omega)$ zu erarbeiten, betrachte

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p}^p = \int_{B_1(0)} |u(x)|^p\ dx &= \int_0^1\int_{S^{d-1}} |u(r\varphi)|^p r^{d-1}\ d\varphi\,dr \\
&= \int_0^1\int_{S^{d-1}} |\cos(r)|^p\, r^{\alpha p+d-1}\ d\varphi\,dr \\
&\leq |S^{d-1}|\int_0^1 r^{\alpha p+d-1}\,dr
\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist endlich, falls $\alpha p + d - 1 > -1$ gilt, also genau dann $\alpha > -\frac{d}{p}$. Wenn wir die vorherigen Abschätzungen bezüglich $\partial_i u$ und den Hinweis mit einbeziehen, sehen wir

$$
\begin{aligned}
\|\partial_i u\|_{L^p}^p &= \int_\Omega |\partial_i u|^p \, dx \le \int_\Omega \left(\alpha \|x\|_2^{\alpha-1} + \|x\|_2^\alpha\right)^p \, dx \\
&\le c \int_\Omega \alpha^p \|x\|_2^{\alpha p - p} + \|x\|_2^{\alpha p} \, dx \\
&= c \int_0^1 \int_{S^{d-1}} (\alpha^p r^{\alpha p - p} + r^{\alpha p}) r^{d-1} \, d\varphi \, dr \\
&= c \, |S^{d-1}| \left(\int_0^1 \alpha^p r^{(\alpha-1)p+d-1} \, dr + \int_0^1 r^{\alpha p + d - 1} \, dr \right)
\end{aligned}
$$

Das erste Integral existiert unter der Bedingung $\alpha > \frac{p-d}{p}$, das zweite, falls $\alpha > -\frac{d}{p}$ erfüllt ist. Insgesamt gilt damit

$$
\begin{aligned}
\alpha p > -d &\Rightarrow u \in L^p(\Omega) \\
\alpha p - p > -d &\Rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7. *Sei $\Omega = [0,1]$, $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten folgendes Problem*

$$
\begin{cases}
-\Delta u(x) + q(x) u(x) & = f(x) \qquad x \in \Omega \\
\qquad\qquad\quad u(y) & = 0 \qquad\quad\; y \in \partial\Omega
\end{cases}
$$

1. *Stellen Sie die schwache Formulierung dieses Problems auf.*

2. *Beweisen Sie unter geeigneten Bedingungen an q die Existenz einer schwachen Lösung dieses Problems in $X = H_0^1(\Omega)$.*

3. *Sei $X_h \subset X$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Leiten Sie das Céa-Lemma her und gewinnen Sie mit seiner Hilfe eine erste, einfache Fehlerabschätzung für den hier betrachteten Spezialfall.*

4. *Wir nehmen an, dass die Lösung des Problems*

$$
a(u, w) = (f, w)_{L^2(\Omega)} \ \forall \, w \in H_0^1(\Omega)
$$

für ein festes $f \in L^2(\Omega)$ der Abschätzung $|u|_{H^2(\Omega)} \le C_R \|f\|_{L^2(\Omega)}$ mit einer Konstanten $C_R > 0$ genügt. Zeigen Sie, dass die Betrachtung des dualen Problems

$$
\text{Gesucht ist } \varphi \text{ s.d. } a(\varphi, w) = (u - u_h, w)_{L^2(\Omega)} \ \forall \, w \in H_0^1(\Omega)
$$

zusammen mit der Abschätzung des Interpolationsfehlers $\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \le C_I h |v|_{H^2(\Omega)}$ auf die Fehlerabschätzung

$$
\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \le C(C_I, C_R) \, h^2 \, |u|_{H^2(\Omega)}
$$

führt, wobei $C(C_I, C_R) > 0$ eine Konstante ist, die (unter anderem) von den Konstanten $C_I, C_R > 0$ abhängt.

5. *Nun werde die Diskretisierung der schwachen Formulierung mit linearen Ansatzfunktionen auf dem äquidistanten Gitter $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ mit $x_i = i/N$ betrachtet. Der Operator $\ell(w) = (f, w)_{L^2(\Omega)}$ werde mit Hilfe der Mittelpunktsregel*

$$\int_a^b h(x)\,dx \;\approx\; (b-a)\,h\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

diskretisiert. Erzielen Sie mit Hilfe des ersten Lemmas von Strang eine Abschätzung für den Fehler $\|u_h - u\|_{H^1}$.

Lösungsvorschlag:

1. Multiplikation mit einer Testfunktion v und partielle Integration führen auf

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) + q(x)u(x)v(x)\ dx}_{=:a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f(x)v(x)\ dx}_{:=\ell(v)}$$

Das Problem hat dann folgende Form

Bestimme $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

2. Das Lemma von Lax-Milgram besagt, dass das Problem aus 1. eine eindeutige Lösung besitzt, sofern a eine koerzive, beschränkte Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$ ist und ℓ stetig von $H_0^1(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Die Stetigkeit von ℓ folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, denn

$$|\ell(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\ dx\right| \le \int_\Omega |f(x)v(x)|\ dx \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$$

Zum Nachweis der Stetigkeit von a betrachten wir

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) + q(x)u(x)v(x)\ dx\right| \le \int_\Omega |\nabla u(x)\nabla v(x) + q(x)u(x)v(x)|\ dx \\
&\le |u|_{H^1}|v|_{H^1} + \int_\Omega |q(x)u(x)v(x)|\ dx \le |u|_{H^1}|v|_{H^1} + \|q\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\le \max\{1, \|q\|_{L^\infty}\}\,\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Diese Abschätzungen sind zulässig, sofern $q \in L^\infty(\Omega)$ ist, was wir nunmehr annehmen. Was die Koerzitivität angeht, gilt

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega \|\nabla v(x)\|_2^2 + q(x)v(x)^2\ dx \overset{\text{falls } q\ge 0}{\ge} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\ dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\ dx\right) \\
&\ge c\left(\int_\Omega v(x)^2\ dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\ dx\right)
\end{aligned}$$

In die letzte Abschätzung floss dabei die Poincaré-Ungleichung ein. Wir fordern also zusätzlich zur Annahme $q \in L^\infty(\Omega)$, dass $q \ge 0$ sein soll. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, liefert das Lemma von Lax-Milgram die eindeutige Lösbarkeit des Problems.

3. Wir bezeichnen den zu Grunde liegenden Finite Elemente Raum mit X_h. Wegen Konformität gilt $X_h \subset X = H_0^1(\Omega)$. Das Céa-Lemma wird nun mit Hilfe dreier Zutaten hergeleitet:

   - Koerzitivität von a: $a(v,v) \geq c\|v\|_{H^1}^2$
   - Stetigkeit von a: $a(u,v) \leq C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$
   - Galerkin-Orthogonalität: Erfüllen u und u_h die Gleichungen

   $$a(u,v) = l(v) \; \forall \, v \in X$$
   $$a(u_h,v_h) = l(v_h) \; \forall \, v_h \in X_h$$

   Gilt insbesondere $a(u,v_h) = l(v_h) \; \forall \, v_h \in X_h$ und durch Differenzbildung

   $$a(u_h - u, v_h) = 0 \; \forall \, v_h \in X_h$$

   Mit ihrer Hilfe gilt:

   $$\begin{aligned} c\|u_h - u\|_{H^1}^2 &\leq a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h - u, v_h - u) \\ &\leq C\|u_h - u\|_{H^1}\|v_h - u\|_{H^1} \\ &\Rightarrow \|u_h - u\|_{H^1} \leq \frac{C}{c} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1} \end{aligned}$$

   Wir haben bereits als Stetigkeitskonstante $C = \max\{1, \|q\|_{L^\infty}\}$ errechnet. Mit Aufgabe 4 auf Blatt 6 folgt weiter:

   $$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \pi^2 \|v\|_{L^2}^2$$

   Damit lassen sich die Rechnungen aus Aufgabenteil 2 verbessern und wir erhalten für die Koerzitivitätskonstante $c = \frac{1}{2}$. Insgesamt gilt dann

   $$\|u_h - u\|_{H^1} \leq 2\max\{1, \|q\|_{L^\infty}\} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1}$$

4. Wir verwenden folgende Aussagen:

   (a) Stetigkeit von a: $a(u,v) \leq C_S\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$.
   (b) Elliptische Regularität: $|u|_{H^2} \leq C_R\|f\|_{L^2(\Omega)}$ gilt für die Lösung von $a(u,v) = (f,v)_{L^2} \, \forall \, v \in H_0^1(\Omega)$.
   (c) Interpolationsabschätzung: $\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_I h |v|_{H^2(\Omega)}$.
   (d) Galerkin-Orthogonalität: $a(u_h - u, v_h) = 0 \, \forall v_h \in X_h$.
   (e) Aussage des Céa-Lemmas: $\|u - u_h\|_{H^1} \leq C_{\text{Cea}} \inf_{w_h} \|u - w_h\|_{H^1}$.

   Sei nun φ die Lösung des dualen Problems $a(w,\varphi) = (u - u_h, w)_{L^2} \, \forall \, w \in H_0^1$. Es gilt:

   $$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= (u - u_h, u - u_h)_{L^2} = a(u - u_h, \varphi) \overset{(d)}{=} a(u - u_h, \varphi - \varphi_h) \\ &\overset{(a)}{\leq} C_S\|u - u_h\|_{H^1}\|\varphi - \varphi_h\|_{H^1} \end{aligned}$$

Da dies für alle φ_h gilt, folgt mit zweimaliger Anwendung des Céa Lemmas

$$\begin{aligned}
C_S\|u-u_h\|_{H^1}\|\varphi-\varphi_h\|_{H^1} &\overset{(e)}{\le} C_S C_{\text{Céa}}^2 \inf_{w_h\in X_h}\|u-w_h\|_{H^1}\inf_{\varphi_h\in X_h}\|\varphi-\varphi_h\|_{H^1}\\
&\le C_S C_{\text{Céa}}^2\|u-I_hu\|_{H^1}\|\varphi-I_h\varphi\|_{H^1}\\
&\overset{(c)}{\le} C(C_S,C_{\text{Céa}},C_I)\,h^2|u|_{H^2}|\varphi|_{H^2}\\
&\overset{(b)}{\le} C(C_S,C_{\text{Céa}},C_I,C_R)\,h^2\,|u|_{H^2}\|u-u_h\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Kürzen durch $\|u-u_h\|_{L^2}$ liefert dann die Behauptung.

5. Mit $\overline{x}_i := (x_i+x_{i-1})/2$ und $h_i := x_i - x_{i-1}$ haben wir

$$\begin{aligned}
|\ell(w_h)-\ell_h(w_h)| &= \left|\sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)w_h(x)\;dx - h_i(fw_h)(\overline{x}_i)\right| \le \sum_{i=1}^N\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)w_h(x)\;dx - h_i(fw_h)(\overline{x}_i)\right|\\
&= \sum_{i=1}^N\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)w_h(x)-f(\overline{x}_i)w_h(\overline{x}_i)\,dx\right| \overset{\text{Taylor}}{\le} \sum_{i=1}^N\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[fw_h]'(\xi_i)\,(x-\overline{x}_i)\,dx\right|\\
&\le \|f\|_{C^2}\sum_{i=1}^N\int_{x_{i-1}}^{x_i}(|w_h|+|w_h'|)(\xi_i)(x-\overline{x}_i)\,dx\\
&\le \|f\|_{C^2}\sum_{i=1}^N(\|w_h\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}+\|w_h\|_{H^1(x_{i-1},x_i)})\|x-\overline{x}_i\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}\\
&\le \|f\|_{C^2}\left(\sum_{i=1}^N\|w_h\|^2_{H^1(x_{i-1},x_i)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^N\frac{h_i^3}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\,h\,\|f\|_{C^2}\|w_h\|_{C^2}
\end{aligned}$$

Geht man nun davon aus, dass $a_h(v_h,w_h)$ für $v_h,w_h\in X_h$ exakt berechenbar ist, dann liefert das erste Lemma von Strang

$$\begin{aligned}
\|u_h-u\|_{H^1} &\le K\left[\inf_{v_h\in X_h}\|u-v_h\|_{H^1}+\sup_{w_h\in X_h}\frac{|\ell(w_h)-\ell_h(w_h)|}{\|w_h\|_{H^1}}\right]\\
&\le K\left[\inf_{v_h\in X_h}\|u-v_h\|_{H^1}+h\tilde{C}\|f\|_{C^2}\right]\\
&\le K\left[\tilde{\tilde{C}}h|u|_{H^2}+h\tilde{C}\|f\|_{C^2}\right]\\
&\le ch(\,|u|_{H^2}+\|f\|_{C^2})
\end{aligned}$$