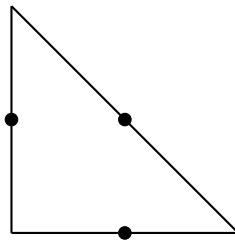


Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 9, Abgabe 22. 12. 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte). *In der Vorlesung wurde das Crouzeix-Raviart-Element vorgestellt:*



Zeigen Sie an Hand eines Beispiels für ein einfaches Gebiet Ω , dass der aus einer Triangulierung resultierende Finite-Elemente-Raum nicht Teilmenge von $H^1(\Omega)$ sein muss.

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Betrachten Sie die schwache Formulierung der Poisson-Gleichung*

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

mit $f \in L^2(0, 1)$. Zu ihrer Diskretisierung seien lineare Ansatzfunktionen auf einem Gitter $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$ mit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ vorgegeben. Zur numerischen Behandlung der Integrale soll die Trapezregel

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

verwendet werden. Schätzen Sie den Fehler $\|u_h - u\|_{H^1}$ mit Hilfe des ersten Lemmas von Strang ab.

Aufgabe 3 (8 Punkte). *In der Vorlesung wurde der folgende Satz formuliert*

Sei $\Omega = [0, 1]^2$, $f \in L^2$ und u die Lösung von $-\Delta u + u = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Die Diskretisierung erfolge mittels einer quasiuniformen Triangulierung mit Crouzeix-Raviart Elementen, der bilineare Operator der schwachen Formulierung werde für die diskrete Formulierung entsprechend angepasst. Dann gilt für den Fehler $u_h - u$

$$\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad C > 0$$

1. Führen Sie den Beweis, der in der Vorlesung skizzenhaft blieb, in dieser Übungsaufgabe in allen Details aus.
2. Nun werde in der Diskretisierung der lineare Operator der schwachen Formulierung mittels numerischer Quadratur auf jedem Dreieck ausgewertet (Quadraturpunkte seien die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, je mit Gewicht $\frac{1}{3}$). Beweisen Sie $\|u_h - u\|_{L^2} \leq Ch^2 \|f\|_{C^2}$ für ein festes C (abhängig von Ω und der Quasiuniformität).
Hinweis: Erweitern Sie den Beweis aus 1. um Abschätzungen, die in der Vorlesung im Zusammenhang mit Strangs erstem Lemma durchgeführt wurden.