Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski WS 16/17

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 7, Abgabe 8. 12. 2016

Aufgabe 1 (12 Punkte). *Gegeben sei das Problem*

$$(\star) \begin{cases} -\Delta u(x) = \sin(\pi x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

mit der exakten Lösung $u(x) = \sin(\pi x)/\pi^2$.

1. *Betrachten Sie die Unterteilung* $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$. *Geben Sie eine Finite Elemente Basis* $(\Phi_i)_i$ *von stückweise linearen Ansatzfunktionen auf dem Gitter* $(x_0, \ldots, x_N)$ *an.*

2. *Die Diskretisierung des Problems* $(\star)$ *mit Hilfe der Basis aus Aufgabenteil* (1) *führt Sie auf das lineare Gleichungssystem*

$$Lu_N = B, \quad L = \left(\int_\Omega \nabla\Phi_i(x) \cdot \nabla\Phi_j(x)\; dx \right)_{ij}, \quad B = \left(\int_\Omega \Phi_i(x) \sin(\pi x)\; dx \right)_i$$

   Geben Sie für eine Unterteilung $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$ *die Matrix* L *und den Vektor* B *explizit an.*

3. *Lösen Sie das Gleichungssystem aus dem vorangegangenen Aufgabenteil für* $N = 5$ *und* $x_i = \frac{i}{N}$ *von Hand. Stellen Sie die exakte Lösung und ihre numerische Approximation in einem Schaubild dar.*

4. *Schreiben Sie Matlab-Routinen, welche* L *und* B *für ein vom Nutzer vorgegebenes Gitter* $(x_0, \ldots, x_N)$ *assemblieren und die Approximation* u_N *an* u *berechnen.*

5. *Nutzen Sie die Routinen aus Aufgabenteil* (4)*, um den Approximationsfehler in der Supremumsnorm und der* H^1*-Norm in Abhängigkeit der Knotenanzahl* N *grafisch darzustellen. Sie können Ihre Untersuchungen dabei auf den Fall eines äquidistanten Gitters mit* $x_i = \frac{i}{N}$ *beschränken.*

6. *Leiten Sie eine Abschätzung des Fehlers* $\|u_h - u\|_{H^1}$ *der Finite Elemente Approximation* u_h *her, aus der die Konvergenz mit der Gitterweite* h *ersichtlich wird (inklusive Céas Lemma und einer Abschätzung des Interpolationsfehlers* $\|u - I_h u\|_{H^1}$*).*

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Sei* $U := \{f \in L^2(\Omega) \mid f = \text{const}\}$*. Beweisen Sie, dass*

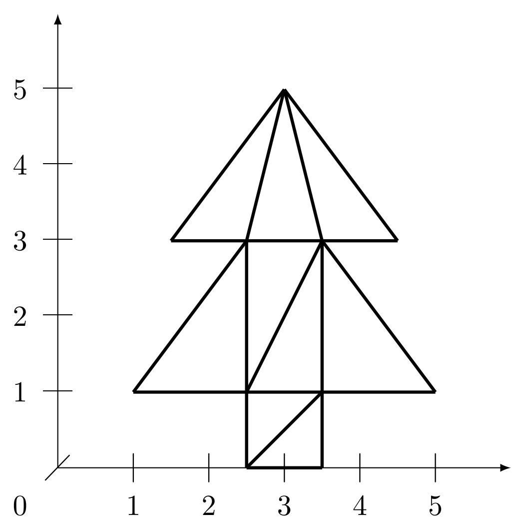
$$\overline{u} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\ dx$$

die Bestapproximation bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$ *an* u *darstellt, also*

$$\inf_{v \in U} \|u - v\|_{L^2} = \|u - \overline{u}\|_{L^2}$$

gilt.

Aufgabe 3 (**Nikolausaufgabe**, 4 Zusatzpunkte)**.** *Bestimmen Sie das Knoten- und das Konnektivitätsarray folgender (vorweihnachtlicher) Triangulierung*



Bestimmen Sie, für welche ϱ *diese Triangulierung eine* ϱ*-uniforme Triangulierung ist.*