Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski

WS 16/17

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 6, Abgabe 1. 12. 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *In der Vorlesung haben Sie die Beschränktheit und Koerzitivität der Bilinearform*

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla v^t A \nabla u + v(b \cdot \nabla u) + q\,u\,v \;dx + \int_{\Gamma_1} p\,u\,v \;dx$$

unter folgenden Bedingungen gezeigt:

1. $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d})$ *mit* $\xi^t A \xi \geq c\|\xi\|^2$ *fast überall für alle* $\xi \in \mathbb{R}^d$,
2. $b \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ *mit* $|b(x)|^2 \leq 4\,\tilde{c}\,q(x)$ *fast überall in* Ω *für ein* $\tilde{c} < c$,
3. $q \in L^\infty(\Omega)$ *und* $q \geq 0$ *fast überall,*
4. $p \in L^\infty(\Gamma_1)$ *mit* $p \geq 0$ *fast überall,*
5. $f \in L^2(\Omega)$, $q \in L^2(\Gamma_1)$.

Dabei war Ω *ein Lipschitz-Gebiet mit* $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_2 = \partial\Omega \backslash \Gamma_1$, $\mu(\Gamma_2) > 0$. *Statt Bedingung 2 lässt sich auch folgende Modifikation betrachten*

$\tilde{2}$. $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $q - \frac{1}{2}\mathrm{div}\; b \geq 0$ *fast überall in* Ω.

Zeigen Sie die Koerzitivität von a unter Verwendung der Bedingungen 1,$\tilde{2}$*,3,4,5.*
Hinweis*: Die Identität* $v\nabla v = \frac{1}{2}\nabla(v^2)$ *kann bei den Berechnungen hilfreich sein.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Betrachten Sie folgende (elliptische) Bilinearform*

$$a(u,v) = \int_0^1 x^2 u'(x) v'(x) \;dx$$

auf dem Intervall $[0,1]$. *Zeigen Sie, dass das Problem*

$$J(u) = \int_0^1 x^2 (u'(x))^2 \;dx - \int_0^1 u(x)\;dx \;\rightarrow\; \min$$

keine *Lösung in* $H_0^1(0,1)$ *besitzt.*

Hinweis: *Studieren Sie die zu Grunde liegende Differentialgleichung und ihre (eindeutige) Lösung* u_ε *zunächst auf* $[\varepsilon, 1]$. *Betrachten Sie dann das Verhalten von* $J(u_\varepsilon)$ *für* $\varepsilon \to 0$. *Steht Ihr Ergebnis im Widerspruch zu der Aussage des Lemmas von Lax-Milgram?*

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$. Betrachtet wird das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha\, u &= f \quad \textit{in } \Omega \\ \qquad\quad u &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Beweisen Sie die Existenz einer schwachen Lösung in $H_0^1(\Omega)$ für $\alpha > 0$. Welche Schwierigkeiten erwarten Sie im Fall $\alpha < 0$?

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** *In der Vorlesung wurde folgender Satz formuliert:*

> *Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gelten die nicht verbesserbaren Ungleichungen*
>
> $$\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\pi^2}\,\|\nabla v\|_{L^2}^2 \qquad \textit{falls } \Omega = [0,1]$$
> $$\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\pi^2}\,\|\nabla v\|_{L^2}^2 \qquad \textit{falls } \Omega = [0,1]^2$$

Ergänzen Sie den Beweis dieser Behauptungen. Zeigen Sie dazu im ersten Fall, dass die Ungleichung über die Bestimmung der ersten Optimalitätsbedingung des Problems

$$\inf_{\substack{v \in H_0^1 \\ \|v\|_{L^2} \neq 0}} \frac{\|v'\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}} \tag{1}$$

auf das folgende Randwertproblem führt

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Die Existenz eines Minimierers von (1) brauchen Sie dabei nicht zu zeigen.

Nutzen Sie für den Beweis der zweiten Ungleichung die Eigenschaften der semidiskreten Fourier-Transformation $U \mapsto \hat{U}$, wobei Sie die zweidimensionale semidiskrete Fourier-Transformation von $(U_{ij})_{ij}$ durch

$$\hat{U}(x,y) := \widehat{V^x}(y),\ V^x := (\widehat{U_{:,j}}(x))_j,\ U_{:,j} = (\ldots U_{-1,j}, U_{0,j}, U_{1,j}, \ldots)$$

auf die eindimensionale Transformation zurückführen können. Betrachten Sie dann für ein festgehaltenes $v \in H_0^1(\Omega)$ die Erweiterung $u = \begin{array}{|c|c|} \hline v & -v \\ \hline -v & v \\ \hline \end{array}$ auf $[0,2]^2$ und studieren Sie den Ansatz $u(\cdot) = \hat{U}\left(\cdot + \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\Delta x} \\ \frac{\pi}{\Delta x} \end{pmatrix}\right)$.