Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski WS 16/17

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 5, Abgabe 24. 11. 2016

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

1. *$f \in L^1_{loc}$ besitze eine schwache partielle Ableitung $\partial_{x_i} f \in L^1_{loc}(\Omega)$, ψ sei ein Element von $C^\infty(\Omega)$. Unter diesen Bedingungen ist ψf schwach partiell nach x_i differenzierbar und es gilt*

$$\partial_{x_i}(\psi f) = (\partial_{x_i}\psi)f + \psi(\partial_{x_i} f)$$

2. *Betrachtet wird die Heaviside-Funktion*

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in [0,\infty) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass H keine *schwache Ableitung in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ besitzt. Zeigen Sie zu diesem Zweck, dass sich für eine schwache Ableitung ∂H und ein gegebenes $0 < c < 1$ ein $\varepsilon > 0$ finden ließe, welches*

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\partial H(x)| \; dx < c$$

erfüllte. Betrachten Sie anschließend die Definition der schwachen Ableitung für ∂H und ein $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(v) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\max_x v(x) = v(0) = 1$.

3. *Betrachten Sie die Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto x|y|$$

Zeigen Sie, dass im schwachen Sinne $\partial_1^2 \partial_2 f$ existiert, $\partial_2^2 \partial_1 f$ hingegen nicht. Beachten Sie dabei Aufgabenteil (2).

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** *Berechnen Sie die Gâteaux-Ableitung von folgenden Funktionalen*

- *für feste $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 : C^\infty(\Omega, \Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_\Omega |(u \circ \varphi)(x) - v(x)|^2 \; dx \end{aligned}$$

- *für einen Hilbertraum H, einen beschränkten linearen Operator $A : H \to H$ und ein fest gewähltes Element $b \in H$*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 : H &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|Ax - b\|_H^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** *Sei $X := \{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0, u'(1) = 1\}$ und $I : X \to \mathbb{R}$ sei durch*

$$I(u) := \int_0^1 (u'(x))^2 \, dx$$

definiert. Betrachten Sie das Minimierungsproblem $\min_{u \in X} I(u)$.

1. *Leiten Sie über die Berechnung der Gâteaux-Ableitung die Optimalitätsbedingung erster Ordnung her und geben Sie das zu Grunde liegende Randwertproblem an (bestehend aus partieller Differentialgleichung und Randbedingungen).*

2. *Zeigen Sie, dass kein $u \in X$ existiert, s.d.*

$$I(u) = \inf_{v \in X} I(v)$$

und folgern Sie, dass das Randwertproblem keine Lösung in X besitzt.

3. *Leiten Sie die schwache Formulierung des Randwertproblems her, welches Sie in 1. aufgestellt haben.*

4. *Da jedes Element von $H^1(0,1)$ einen stetigen Repräsentanten besitzt, lässt sich eine punktweise Auswertung eines Elements von $H^1(0,1)$ sinnvoll interpretieren. Garantieren Sie mit Mitteln der Vorlesung die Existenz einer eindeutigen Lösung u des schwachen Randwertproblems in $\mathcal{H} = \{u \in H^1(0,1) \mid u(0) = 0\}$. Folgern Sie, dass für diese $u = \min_{v \in H} I(v)$ gilt.*

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** *Sei Ω eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Leiten Sie eine schwache Formulierung des Problems*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für Elemente von $\mathcal{H} = \{v \in H^2(\Omega) \mid v|_\Omega = \frac{\partial v}{\partial n}|_\Omega = 0\}$ und ein festes $f \in L^2(\Omega)$ her.