Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 4, Abgabe 17. 11. 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte). *Betrachtet wird das folgende Problem*

$$u_t + tu_x = u, \quad u(0,x) = h(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ *und seine Diskretisierung*

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\Delta t} + t^m \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{\Delta x} - u_i^m = 0$$
$$u_i^0 = h_i$$

Bestimmen Sie die analytische und numerische Domain of Dependence *und formulieren Sie die CFL-Bedingung für dieses Problem.*

Aufgabe 2 (4 Punkte). *In der Vorlesung wurden verschiedene Verfahren zur Diskretisierung der eindimensionalen Transportgleichung* $u_t + au_x = 0$ *vorgestellt. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung für das*

1. *Verfahren mit zentralen Differenzen,*
2. *Lax-Friedrichs-Verfahren,*
3. *Lax-Wendroff-Verfahren.*

Aufgabe 3 (4 Punkte). *Betrachtet wird die zweidimensionale Transportgleichung*

$$u_t(t,x,y) + a_1(t,x,y)u_x(t,x,y) + a_2(t,x,y)u_y(t,x,y) = f(t,x,y), \qquad a_{1,2} \geq 0$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *und ihre Diskretisierung*

$$\frac{u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m}{\Delta t} + a_1(t^m, x_i, y_j)\frac{u_{ij}^m - u_{i-1j}^m}{\Delta x} + a_2(t^m, x_i, y_j)\frac{u_{ij}^m - u_{ij-1}^m}{\Delta y} = f(t^m, x_i, y_j)$$

wobei eventuell vorgegebene Rand- und Anfangsbedingungen entsprechend zu diskretisieren sind. Zeigen Sie, dass für

$$|a_1(t,x,y)(\Delta t/\Delta x) + a_2(t,x,y)(\Delta t/\Delta y)| \leq 1, \ \forall\ t,x,y$$

das Verfahren ℓ^∞ *stabil ist. Orientieren Sie sich dabei an dem Beweis des eindimensionalen Beispiels aus der Vorlesung.*

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, 6 Punkte)**.** *Betrachten Sie das eindimensionale Transportproblem*

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin(x)$$

- *Berechnen Sie eine näherungsweise Lösung dieses Problems mit Hilfe des Lax-Wendroff-Verfahrens und des Lax-Friedrichs-Verfahrens und veranschaulichen Sie die Ergebnisse im Vergleich mit der exakten Lösung dieses Problems, welche durch* $u(x,t) = \sin(x-t)$ *gegeben ist. Sie sollten dabei die Werte für* x *und* t *auf geeignete endliche Intervalle einschränken.*

- *Veranschaulichen Sie das Verhalten des Fehlers der numerischen Lösung* $\max_{i,n} |u_i^n - u(x_i,t^n)|$ *in Abhängigkeit der Zeitschrittweite* Δt*. Wie lässt sich auf diesem Wege der Abschneidefehler grafisch darstellen?*