Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski WS 16/17

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 3, Abgabe 10. 11. 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte). *Das ADI-Verfahren für die homogene Wärmeleitungsgleichung wurde über die Vorschrift*

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right) U_{ij}^{m+\frac{1}{2}} & = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^{m} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\mu_2\delta_2^2\right) U_{ij}^{m+1} & = \left(1 + \frac{1}{2}\mu_1\delta_1^2\right) U_{ij}^{m+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass das Verfahren konsistent von der Ordnung 2 ist und ℓ_∞ Stabilität vorliegt, falls $\mu_1, \mu_2 \leq 1$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Betrachtet wird die homogene Wellengleichung*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

mit der Schallgeschwindigkeit c. Vorgegeben sei die Anfangsbedingung $u(x,0) = F(x)$ für $-\infty < x < \infty$. Führen Sie eine von Neumann-Stabilitätsanalyse der Finite-Differenzen-Diskretisierung

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \qquad u_j^0 = F_j$$

durch. Setzen Sie zu diesem Zweck den Ansatz $u_j^m = \lambda^m e^{ijk\Delta x}$ in die Diskretisierung ein und prüfen Sie, unter welchen Bedingungen Sie $|\lambda| \leq 1$ erhalten.

Aufgabe 3 (4 Punkte). *Beweisen Sie folgenden Aussagen:*

- *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ habe positives, endliches Maß. Gilt $p_0 \leq p_1$, so ist $L^{p_1}(\Omega) \subset L^{p_0}(\Omega)$.*
- *Für zwei Elemente $f, g \in L^p(\Omega)$ gilt die* Minkowski-Ungleichung

  $$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

  Nehmen Sie der Einfachheit halber $1 < p < \infty$ an und nutzen Sie die Hölder-Ungleichung sowie die Identität

  $$|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, 4 Punkte)**.** *Implementieren Sie das Upwind-Verfahren für die* $1D$ *Transportgleichung*

$$\begin{aligned} u_t + a(t,x)u_x + c(t,x)u &= f(t,x) \qquad \textit{auf } [0,T] \times \Omega, \quad \Omega = [\ell, r] \\ u(t=0,x) = u_0(x),\ u(t,\ell) &= u_\ell(t) \end{aligned}$$

Ihre Implementierung sollte dabei $a \geq 0$ *vorsehen. Vergleichen Sie die Ergebnisse für verschiedene Orts- und Zeitschrittweiten.*