

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 2, Abgabe 3. 11. 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte). In der Vorlesung wurde ein Satz zur Konsistenzordnung des θ -Verfahrens formuliert, welcher besagt, dass $T_j^m \in \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ für das Crank-Nicolson Verfahren gilt. Beweisen Sie diese Aussage unter Beachtung des Hinweises aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (4 Punkte). In der Vorlesung wurde das Maximumsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung formuliert:

Sei $u_t - \Delta u = f \leq 0$. Dann gilt

$$\max_{(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} u(t,x) = \max_{t=0 \vee x \in \partial\Omega} u(t,x)$$

bzw. im Fall $u_t - \Delta u = f \geq 0$

$$\min_{(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}} u(t,x) = \min_{t=0 \vee x \in \partial\Omega} u(t,x)$$

Ergänzen Sie den Beweis aus der Vorlesung um den Beweis der zweiten Aussage und folgern Sie, dass für zwei Lösungen u_1, u_2 des Problems

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= g(t), \quad u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

(für gegebene f, g und h) $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ für alle $x \in [0,L]$ und $t \geq 0$ gelten muss.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Betrachtet wird das θ -Verfahren für $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und Gitterweiten $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2$. In dieser Aufgabe soll der Spezialfall $\theta = 1$ betrachtet werden. Zeigen Sie, dass das Verfahren uneingeschränkt ℓ^∞ stabil ist und für den Abschneidefehler $T_j^m \in \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)$ gilt.

Aufgabe 4 ((Programmieraufgabe) 4 Punkte). Betrachten Sie auf $[0, L] \times [0, T]$ das Problem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x/L) \end{aligned}$$

Implementieren Sie in Matlab das θ -Verfahren für die Lösung dieses Problems und vergleichen Sie die Ergebnisse für verschiedene Schrittweiten mit der exakten Lösung

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 t}{L^2}\right)$$