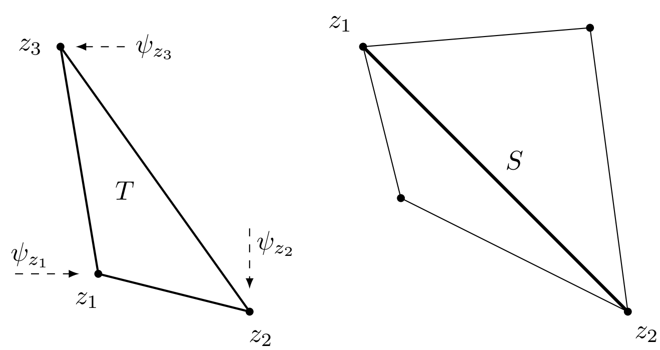
Prof. Dr. B. Wirth WS 16/17
Paul Striewski

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 11, Abgabe 26. 1. 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte). *In der Vorlesung wurden Kanten- und Element-Blasenfunktionen definiert.*



1. *Für eine Kante S zwischen zwei Dreiecken war $\varphi_S = \psi_{z_1}\psi_{z_2}$ gesetzt worden, wobei z_1, z_2 Anfangs- und Endpunkt der Kante ist und ψ_{z_j} die in dem jeweiligen Punkt lokalisierte Hütchenfunktion bezeichnet. Zeigen Sie, dass φ_S folgende Eigenschaften besitzt*
   - $\varphi_S \geq 0$,
   - $\int_S p^2(x)\varphi_S(x)\,dx \;\sim\; \int_S p^2(x)\,dx$,
   - $\|\varphi_S\|_{L^\infty(N(S))} + h_S\|\nabla\varphi_S\|_{L^\infty(N(S))} \lesssim 1$,

   wobei die Konstanten von der Quasiuniformität der Triangulierung abhängen.

2. *Ein Beispiel einer Element-Blasenfunktion wurde durch $\psi_T = c\psi_{z_1}\psi_{z_2}\psi_{z_3}$ gegeben. Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl von c folgende Eigenschaften von ψ_T gelten:*
   - $\psi_T \in W_0^{1,\infty}(T)$,
   - $\int_T \psi_T(x)\,dx = 1$,
   - $\|\nabla\psi_T\|_{L^\infty} \lesssim h_T$.

Aufgabe 2 (12 Punkte). *In der Vorlesung hatten Sie einen lokalen Residuenfehlerschätzer für Probleme mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen kennengelernt. In dieser Aufgabe sollen Sie die Zuverlässigkeit eines modifizierten lokalen Residuenfehlerschätzers zeigen, der auf das Problem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

anwendbar ist, wobei $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ und meas$(\Gamma_D) > 0$.

1. *Zeigen Sie, dass die schwache Formulierung des gegebenen Problems die Gestalt*

$$\textit{finde } u \in X \textit{ sodass } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v + \int_{\Gamma_N} g v \qquad \forall\, v \in X \tag{1}$$

   hat. Dabei ist $X = \{v \in H^1(\Omega) \,|\, v|_{\Gamma_D} = 0\}$.

2. *Sei nun* $X_h \subset X$ *ein Raum von* linearen *Finiten Elementen zu einer quasi-uniformen Triangulierung* $\mathcal{T}$ *von* Ω. *Stellen Sie die diskrete Formulierung des Problems (1) auf, deren Lösung mit* u_h *bezeichnet sei, und leiten Sie folgende Identität her:*

$$\int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v = \int_\Omega f v + \int_{\Gamma_N} g v - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v$$

3. *Zeigen Sie mit Hilfe der Poincare-Ungleichung die Abschätzung:*

$$c \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{\substack{w \in X \\ \|w\|_X = 1}} \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \tag{2}$$

   Folgern Sie mit Hilfe von Gleichung (2) die Gültigkeit von

$$\tilde{c}\, \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{\substack{w \in X \\ \|w\|_X = 1}} \left[\int_\Omega f w + \int_{\Gamma_N} g w - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla w \right].$$

4. *Leiten Sie folgende Darstellung des Residuums her:*

$$\int_\Omega f w + \int_{\Gamma_N} g w - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla w = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_h) w + \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E R_E(u_h) w$$

$$R_K(u_h) := f + \Delta u_h$$

$$R_E(u_h) := \begin{cases} -\,[n_E \cdot u_h] & \textit{falls } E \cap \mathring{\Omega} \neq \emptyset \\ g - n_E \cdot \nabla u_h & \textit{falls } E \subset \Gamma_N \\ 0 & \textit{falls } E \subset \Gamma_D \end{cases}$$

   Betrachten Sie, falls nötig, wie in der Vorlesung die Lokalisierung des Residuums angegangen wurde.

5. *Zeigen Sie mit Hilfe der vorangegangenen Aufgabenteile*

$$\int_\Omega f w + \int_{\Gamma_N} g w - \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla w \ \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|R_K(u_h)\|^2_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}} h_E \|R_E(u_h)\|^2_{L^2(E)} \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{H^1}$$

   und damit die Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \ \leq \ \tilde{C} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|R_K(u_h)\|^2_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}} h_E \|R_E(u_h)\|^2_{L^2(E)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$