Prof. Dr. B. Wirth
Paul Striewski WS 16/17

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 10, Abgabe 19. 1. 2017

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** *In der Vorlesung wurde die* distributionelle Ableitung *eines Elements $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ über die Bedingung*

$$D^\alpha f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \varphi), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert. Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die distributionelle Ableitung $D^k H$ von

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \textit{falls } x < 0 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (14 Punkte)**.** *Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck aus einer $\frac{1}{\rho}$-quasiuniformen Triangulierung, $E \subset T$ eine Kante. Beweisen Sie folgende Ungleichungen (C ist in jeder Ungleichung eine Konstante; geben Sie jeweils explizit an, wie die Konstante von ρ abhängt).*

1. *(Spur-Ungleichung) Für alle $v \in H^1(T)$ gilt*

$$\|v\|_{L^2(E)} \leq C \left(h_T^{-1/2} \|v\|_{L^2(T)} + h_T^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(T)} \right) .$$

2. *(Poincaré-Ungleichung) Für alle $v \in H_0^1(T)$ gilt*

$$\|v\|_{L^2(T)} \leq C h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}.$$

3. *Für alle $v \in H^1(T)$ gilt folgende Variante der Poincaré-Ungleichung,*

$$\|v - \overline{v}\|_{L^2(T)} \ \leq \ C h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}, \qquad \overline{v} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\ dx\, .$$

4. *(Inverse Ungleichung) Für jedes Polynom $p \in \Pi^k(T)$, $k \geq 1$, gilt*

$$\|\nabla p\|_{L^2(T)} \leq C h_T^{-1} \|p\|_{L^2(T)}\, .$$

5. *(Diskrete Spur-Ungleichung) Für jedes Polynom $p \in \Pi^k(T)$, $k \geq 1$, gilt*

$$\|p\|_{L^2(E)} \leq C h_T^{-1/2} \|p\|_{L^2(T)}\, .$$

   Geben Sie für $k = 0$ eine explizite Schranke für C an.