

Numerik partieller Differentialgleichungen

Anwesenheitsblatt (keine Abgabe)

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Betrachtet werden folgende partielle Differentialgleichungen:

1. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$
2. $xyu_{xx} + x^2u_{xy} - yu_x = 0$
3. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 4x^2$
4. $(x^2 - 1)u_{xx} - xu_x + 2xyu_{xy} + (y^2 - 1)u_{yy} + yu_y = 0$
5. $2u_{xx} + \frac{1}{2}u_{yy} = -f(x, y)$

für $(x, y) \in \Omega$, $u(x, y) \in C^2(\Omega)$. Bestimmen Sie jeweils, in welchen Bereichen die Gleichungen hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sind.

Aufgabe 2. Seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge mit abschnittsweise glattem Rand. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta u \, dx &= \int_{\partial\Omega} \partial_n u \, d\sigma \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\partial\Omega} u \partial_n v \, d\sigma - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx \\ \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx &= \int_{\partial\Omega} u \partial_n v - v \partial_n u \, d\sigma\end{aligned}$$

Aufgabe 3. In der Vorlesung wurde der folgende Satz bewiesen:

u genüge der Gleichung $u_t - u_{xx} = f$ auf $[0, \infty[\times \Omega$, wobei entweder $\Omega = \mathbb{R}$ gelte oder im Fall $\Omega = [a, b]$ zusätzlich $u|_{\partial\Omega} = 0$ gefordert werde. Unter diesen Bedingungen gilt folgende Ungleichung

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^2} + \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{L^2} \, ds$$

Verallgemeinern Sie diesen Satz in geeigneter Weise auf den Fall $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$.

Aufgabe 4. *Betrachtet wird die Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) \quad \text{auf } \Omega \times [0, T] \\u(x, 0) &= g(x), \quad u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = u(\cdot, 0)|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

mit $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Geben Sie (in Pseudocode) eine Implementierung des expliziten Eulerverfahrens zur näherungsweisen Bestimmung der Lösung dieser Gleichung an.