Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 8 , Abgabe: 25.06.1998 , 13.00 Uhr

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Auf das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -a_1 u_{x_1x_1} - a_2 u_{x_2x_2} &= f \text{ in } \Omega = (0,1)\times(0,1), \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten a_1 und a_2 wende man das Galerkin-Verfahren an. Dabei sollen als Ansatzraum $V_h \subset C(\bar{\Omega})$ stückweise bilineare Funktionen auf einer gleichmäßigen Zerlegung von Ω in Quadrate der Seitenlänge $h = \frac{1}{n+1}$ verwendet werden. (D.h. Funktionen $v_h \in V_h$ haben auf jedem Teilquadrat die Gestalt $v_h(x_1,x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2$.) Man stelle die Steifigkeitsmatrix A bezüglich der zugehörigen Knotenbasis auf.

(Hinweis: Man verwende die Eigenschaft, daß sich jede Basisfunktion als $\Phi_{(\nu_1\nu_2)}(x_1,x_2) = \hat{\Phi}_{\nu_1}(x_1)\Phi_{v_2}(x_2)$ schreiben läßt, wobei Φ_ν eindimensionale stückweise lineare Basisfunktionen sind.)

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Gegeben sei das Randwertproblem

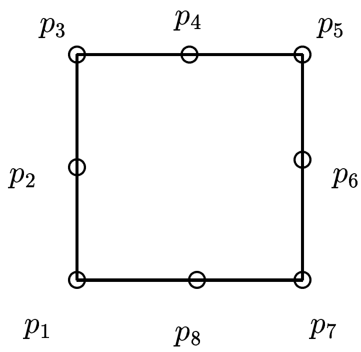
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_0 \subset \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \text{ auf } \Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ ein Lipschitz-Gebiet ist. Leiten Sie eine Variationsformulierung her. Spezifizieren Sie dazu die notwendigen Räume V, V_f, V_g, s.d.

$$a(u,v) = F(v)\ \forall v \in V$$

und $u \in V, f \in V_f, g \in V_g$ gilt.

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Für die quadratischen Elemente der Serendipity-Klasse (in $\mathbb{R}^2$) werden Polynome in 8 Punkten $p_i, i = 1, ..., 8$ ausgewertet (s. Fig.)



Der zugehörige Polynomraum ist

$$\mathcal{P} = span\{1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2\}$$

Zeigen Sie, daß jedes Polynom aus P eindeutig bestimmt ist durch seine Werte in den Punkten $p_i, i = 1, ..., 8$.

Hinweis: Legen sie den Ursprung in den Mittelpunkt des Elements und geben Sie eine Basis an, bei der die Basisfunktionen N_j in $p_i, i = 1, ..., 8$ die Werte $\delta_{i,j}$ annehmen (sog. Formfunktionen).

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand.

Zeigen Sie, daß die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} u D_i v dx = -\int_{\Omega} D_i u v dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot v \cdot \nu_i d\sigma$$

für $u, v \in H^{1,2}(\Omega)$ und $i = 1, ..., d$ gilt. Dabei sei $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (schwache Ableitung) und $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ der äußere Normalenvektor.