Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 7 , Abgabe: 18.06.1998 , 13.00 Uhr

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Aus der Vorlesung ist bekannt, daß für ein Intervall $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ gilt: $H^{1,2}(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Zeigen Sie: Für zweidimensionale Gebiete gilt diese Aussage nicht mehr. Betrachten Sie dazu die Funktion

$$u(x, y) := log\ log \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

auf dem Einheitskreis $K_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} & \text{für} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

ist in $C_0^\infty((-2, 2))$.
Konstruieren Sie mit Hilfe von $u(x)$ eine Funktion $u_d(x)$, die in $C_0^\infty((-2, 2)^d)$ liegt mit $d \geq 2$ beliebig.

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet mit genügend glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Für festes $f \in C^\infty(\Gamma)$ definieren wir

$$||f||_{H^{1/2}(\Gamma)} := \inf_{\substack{u \in H^{1,2}(\Omega) \\ u/_\Gamma = f}} \{||u||_{H^{1,2}(\Omega)}\}$$

Zeigen Sie:
$||\cdot||_{H^{1/2}(\Omega)}$ ist eine Norm auf $C^\infty(\Gamma)$