Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

# Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 6 , Abgabe: 10.06.1998 , 18.00 Uhr

---

**Aufgabe 20:** (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.
Zeigen Sie, daß für das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ u &= 1 \text{ in } (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

keine Lösung in $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ existiert.

<u>Hinweis:</u> Angenommen eine Lösung existiert. Zeigen Sie zunächst, daß diese Lösung rotationssymmetrisch sein muß. Beweisen Sie dann, daß rotationssymmetrische Lösungen der Potentialgleichung in 2D die folgende Form haben

$$u(r,\phi) = a \cdot log\, r + b$$

wobei, $a, b$ Konstanten sind und $(r,\phi)$ Polarkoordinaten sind. Diese Lösungen hängen also nicht mehr von $\phi$ ab.

**Aufgabe 21:** (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < R < x^2 + y^2 < 1\}$ ein Kreisring. Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 1 \text{ auf } \Gamma_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R\} \end{aligned}$$

Wie verhalten sich die Lösungen für $R \to 0$?

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Rotationssymmetrie und benutzen Sie die Methode von der Trennung der Variablen.

**Aufgabe 22:** (4 Punkte)
Sei $V$ ein linearer Raum und $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to R$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Weiterhin sei $f : V \to R$ ein lineares Funktional. Ein weiteres lineares Funktional $J : V \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$$

Zeigen Sie

(i)

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \Leftrightarrow a(u,v) = f(v) \ \forall v \in V$$

(ii) Es gibt höchstens eine Minimallösung.

**Aufgabe 23:** (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Zeigen Sie, daß die Variationsformulierung

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} g d\sigma \ \forall v \in V$$

mit $V := \{v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ für das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}), g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, nicht immer lösbar ist, auch wenn für das klassische Dirichlet-Problem (1) eine Lösung existiert. Betrachten Sie dazu die Funktion

$$u(r,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} \cdot \frac{sin(n!\phi)}{n^2}$$

auf dem Einheitskreis $\Omega = K_1(0)$ wobei $(r,\phi)$ die entsprechenden Polarkoordinaten sind. Wählen Sie eine passende Randwertfunktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.