Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 5 , Abgabe: 28.05.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Sei $A = D - L - R$ eine reguläre Aufspaltung der Matrix A. Die Iterationsmatrix des symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahrens lautet:

$$M_{SGS} := (D-R)^{-1}L(D-L)^{-1}R$$

a) Geben Sie die Matrix B_{SGS} an, s.d.

$$M_{SGS} = I - B_{SGS}A$$

gilt.

b) Sei A symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie, daß dann auch B_{SGS} symmetrisch positiv definit ist.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren, für welche das Jacobi-Verfahren?

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Die gemischte Randwertaufgabe $-\Delta u = f$ in $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u_n(x,1) &= g_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) &= f_2(y), \quad 0 \le y \le 1 \\ u_n(1,y) &= g_2(y), \quad 0 \le y \le 1 \end{aligned} \tag{1}$$

wird auf einem Gitter (x_i, y_j)

$$\begin{aligned} x_i = ih, \quad 0 \le i \le N \\ y_j = jh, \quad 0 \le j \le N \end{aligned}$$

mit dem 5-Punkt-Stern approximiert und es sei $h = 1/N$. Weiterhin seien A_h bzw. f_h die zugehörige Diskretisierungsmatrix bzw. der zugehörige Diskretisierungsvektor. Die N^2 unbekannten Werte $u^h_{i,j}, 1 \le i,j \le N$, erfüllen dann die Gleichung

$$A_h u^h = f^h \tag{2}$$

a) Zeigen Sie: Die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Problems (1) sind

$$\lambda^{k,l} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{(2l-1)\pi}{2}\right)^2,$$

$$u^{k,l}(x,y) = \sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}\sin\frac{(2l-1)\pi y}{2},$$

für $k, l \in \mathbb{N}_+$.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda^{k,l}$ und Eigenvektoren $u_{i,j}^{k,l}$ der Matrix A_h.

c) Zeigen Sie, daß das SOR Verfahren mit $\omega \in (0,2)$ für die Gleichung (2) konvergiert.