Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 4 , Abgabe: 20.05.98 , 18.00 Uhr

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei $A = D - L - R$ eine positiv definite, symmetrische Matrix und

$$S(\omega) := (D - \omega R)^{-1}((1-\omega)D + \omega L)(D - \omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega R)$$

die zugehörige SSOR-Matrix.

Zeigen Sie, daß $S(\omega)$ ähnlich zu einer positiv semi-definiten, symmetrischen Matrix ist.

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Die Diskretisierung des Neumann-Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega := (0,1)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

durch finite Differenzen auf einem $n \times n$ Gitter Ω_h führt auf folgendes Gleichungssystem

$$A_h u_h = f_h \tag{1}$$

mit

$$A_n = \begin{bmatrix} T & -2I & & & \\ -I & T & -I & & O \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & -I & T & -I \\ & & & -2I & T \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & & O \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ O & & & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

wobei $T, I \in Mat(n,n)$, $I =$ Einheitsmatrix und u_h, f_h wie in der Vorlesung definiert.

a) Die Matrix A_h ist nicht symmetrisch. Finden Sie eine Matrix D_h, s.d. $D_h A_h$ symmetrisch ist. Wie muß nun das Gleichungssystem aussehen, um dieselbe Lösung u_h wie in (1) zu erhalten?

b) Sei $e := (1, 1, ...1)^t \in \mathbb{R}^n$ und D_h wie in a).

Zeigen Sie:
i) Das Gleichungssystem (1) ist genau dann lösbar, wenn $e^t D_h f_h = 0$ gilt.

ii) Je zwei Lösungen können sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Hinweis:
Wählen Sie einen beliebigen, aber festen Punkt $x_0 \in \Omega_h$ und konstruieren sie die Matrix $\hat{A}_h$ aus $D_h A_h$ durch Streichen der zu x_0 gehörigen Spalte und Zeile. Sie dürfen als bekannt voraussetzen, daß $\hat{A}_h$ eine symmetrische, reguläre Matrix ist. Zeigen Sie zunächst ii) und dann i).

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Eine Möglichkeit das Gleichungssystem (1) aus Aufgabe 14 zu lösen, ergibt sich durch die Verwendung eines Lagrangeschen Multiplikators $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} D_h A_h & e \\ e^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_h \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_h f_h \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dabei sei e wie in Aufgabe 14.
Zeigen Sie:

a) Das so erweiterte Gleichungssystem ist stets lösbar.

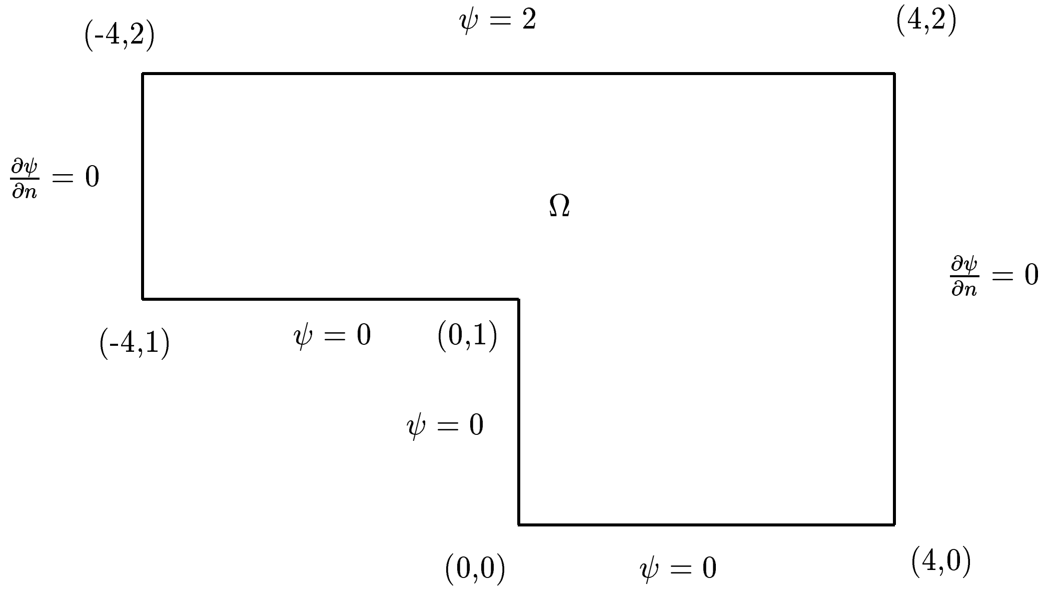
b) Sei u_h eine Lösung des Gleichungssystems (1) aus Aufgabe 14. Wie sieht die zugehörige Lösung des erweiterten Gleichungssystems aus?

   Betrachten sie nun das erweiterte Gleichungssystem und geben Sie ein $\lambda \in \mathbb{R}$ an, so daß dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
(Programmieraufgabe, Abgabe 28.5.98, 13.00 Uhr)
Betrachten Sie die Potentialgleichung

$$\Delta\psi = 0$$

auf folgendem Gebiet Ω mit den gegebenen Randwerten:



Lösen Sie dieses Problem numerisch mit finiten Differenzen für die Gitterschrittweiten $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$. Geben Sie die Lösung für die Punkte $(x, y) \in \{(-4, 3/2), (0, 3/2), (2, 1), (4, 1)\}$ an.