Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

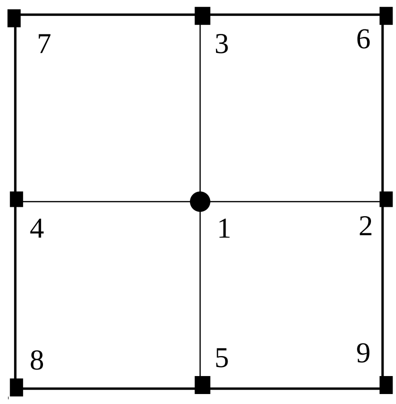
Übungsblatt 3 , Abgabe: 14.05.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1)^2$ und $h = 1/2$. Betrachten Sie die Diskretisierung des Neumann Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

durch finite Differenzen mit der Schnittweite h.

Stellen Sie die Differenzengleichung für $u(P_9)$ auf, wobei P_9 durch folgende Abbildung gegeben ist ($i \hat{=} P_i, i = 1, ..., 9$)



Aufgabe 10: (4 Punkte)
Benutzen Sie die Bezeichnungen aus Kap. 3.5 des Vorlesungsskripts. Sei R eine zusammenhängende Teilmenge von S. Zeigen Sie:

a) Sei $f \leq 0$, $lv \geq 0$ in R und $\partial R \neq \emptyset$.
Dann gilt:
$$v \leq \max\{0, \max_{\partial R} v\}$$

b) Sei $mv \geq 0$ in R und v nehme auf $\bar{R}$ sein Maximum in einem Punkt $P_0 \in \partial R$ an. Dann ist entweder $v \equiv const$ oder $v(P_0) - v(P) > 0$ für $P \in R$.

c) Sei $f \leq 0$ und $lv \geq 0$ in R und v nehme das Maximum auf $\bar{R}$ in $P_0 \in \partial R$ an. Ist das Maximum positiv, so ist entweder $v \equiv const$ oder $v(P_0) - v(P) > 0$ für $P \in R$.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so daß $\rho(A) = 1$ mit $\rho(A)$ Spektralradius von A. Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß ein $x \in \mathbb{R}^2$ existiert mit

$$||Ax|| > ||x||.$$

Aufgabe 12: (4 Punkte)

Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Sei $f \in C^2(\bar{\Omega})$ und u die Lösung der RWA $u'' = f$ in Ω, $u(0) = u(1) = 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{(n+1/2)}$, $x_i := ih$, $0 \le i \le n$, $x_{n+1} := 1$. Sei $v \in \mathbb{R}^{n+2}, m$ der Differenzenoperator

$$mv_i := \tfrac{v_{i+1} + v_{i-1} - 2v_i}{h^2}, \qquad 1 \le i < n \tag{1}$$

$$mv_n := \tfrac{\frac{8}{3}v_{n+1} + \frac{4}{3}v_{n-1} - 4v_n}{h^2} \tag{2}$$

Sei $u^h \in \mathbb{R}^{n+2}$ die Lösung der Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} mu_i^h &= f(x_i), \qquad 1 \le i \le n \\ u_0^h &= u_{n+1}^h = 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie,

$$\max_{0 \le i \le n+1} |u_i^h - u(x_i)| \le \frac{1}{16} h^3 \max_{x \in \bar{\Omega}} |u^{(3)}(x)| + \frac{h^2}{24} \max_{x \in \bar{\Omega}} |u^{(4)}(x)|$$