Prof. Dr. C. W. Cryer SS 98

Numerik Partieller Differentialgleichungen II

Übungsblatt 2 , Abgabe: 07.05.98 , 13.00 Uhr

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Betrachten Sie die Laplace-Gleichung auf $\Omega = (0,3) \times (0,3)$ mit den Randbedingungen

$$\begin{array}{llll} u = x^2 & \text{für} & 0 \le x \le 3 & , \quad y = 0 \\ u = 9 - y^2 & \text{für} & x = 3 & , \quad 0 \le y \le 3 \\ u = x^2 - 9 & \text{für} & 0 \le x \le 3 & , \quad y = 3 \\ u = -y^2 & \text{für} & x = 0 & , \quad 0 \le y \le 3 \end{array}$$

Stellen Sie für $h = 1$ die Finite-Differenzengleichungen auf und berechnen Sie daraus eine numerische Lösung sowie den absoluten Fehler dieser Lösung in den 4 inneren Gitterpunkten.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Auf dem Gebiet $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ soll die Laplace- Gleichung mit den Randbedingungen

$$\begin{array}{llll} u = -1 & \text{für} & -1 < x < 0 & , \quad y = 0 \\ u = 1 & \text{für} & 0 < x < 1 & , \quad y = 0 \\ u = 0 & \text{für} & -1 < x < 1 & , \quad y = 1 \\ u = y - 1 & \text{für} & x = -1 & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 = 1 - y & \text{für} & x = 1 & , \quad 0 < y < 1 \end{array}$$

gelöst werden.

a) Benutzen Sie die Funktion

$$w(x,y) := \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{y}$$

um zu zeigen, daß das RWP eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ besitzt.

b) Zeigen Sie, daß $\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ (x,y)\in\Omega}} u(x,y)$ nicht existiert.

c) Zur numerischen Lösung des RWP mit der 5-Punkte- Differenzenapproximation Δ_h benötigen Sie den Randwert $u(0,0)$. Geben Sie diesen so vor, daß der lokale Diskretisierungsfehler $(\Delta - \Delta_h)u$ im Punkt $(0,h)$ verschwindet.

Aufgabe 7: (2 Punkte)
Finden Sie $u \in C^4(\bar{\Omega})$ mit $\nabla^4 u = 0$ in einem Gebiet Ω, so daß u ein inneres Minimum oder Maximum in Ω hat!

Hinweis: Betrachten Sie quadratische Funktionen in (x, y).

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß das Problem

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} - \mathrm{e}^u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung u hat, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.